# 高中数学学习秘笈

数学是一门基础学科，学好数学能对理化生的学习起到很大的促进作用。在这里我不想谈什么学习态度、学习方法等一些笼统的话题。我会从实际出发，进行归纳总结，给大家带来帮助。

必修一以函数为主。在这一模块的学习中，我们要掌握一些常见的函数类型，学习研究函数特征的基本方法。尤其要掌握对简单函数的单调性进行判断。重点是形如$f(x)=ax+\frac{b}{x}$的函数，它在高中函数题中经常出现。而对函数单调性判断的更高级的工具是导数，具体内容在后文会着重讨论。必修二主要是立体几何，高考命题时常常结合选修 2-1 空间向量，这道题只要认真，做对是很容易的。后面的解析几何初步其实只是个开始，到了选修 2-1，大家才会明白什么叫“解析”。必修三不是重点，高考很少命题，最多会出一个程序框图的选择，认真算就行。必修四的三角函数部分公式很多，需要记忆。虽然和差化积、积化和差高考不做要求，但是还是把那八个公式背下来为好。还有万能公式，书上没提，但最好也掌握。必修五把解三角形、数列、不等式揉在了一本书里。解三角形部分基本上用正余弦定理结合三角恒等变换就能搞定；数列部分需要大家掌握几种常见的递推类型，考题也不会很难；教科书上不等式部分介绍的很少，最好自己加以拓展，可以参照《不等式选讲》，这本书对不等式证明水平的提高有很大帮助。当学到新的不等式时，别忘了把证明弄懂。选修 2-1 的重点是圆锥曲线，这在高考中占据倒数第二道大题的位置。繁杂的计算让每个人都深感头疼。解决圆锥曲线的基本方法是“设而不求”，但有时“设而不求”做不出结果。这时候，就要“设而求”。但这也不是盲目地计算，通常采用将一个根用另一个根表示的方法。同时，解决问题的捷径是平时多积累圆锥曲线的性质及证明（越简洁越好），考试时便可以加以应用，大大地节约时间。建议大家学习书本上并未提到的第二定义，这对圆锥曲线的学习大有裨益。

选修 2-3 的排列组合及统计会综合起来作为高考的一道大题，排列组合会单出一道选择。做排列组合要思路清晰，合理分类、分步。统计大题基本上是送分题，认真即可。

接下来就要说最重要的选修 2-2 的导数部分了。导数一直是高中数学的难点，是高考的压轴题。虽说题型变化多端，但还是有规律可循的。

1. 分离变量

含参函数的讨论常常很复杂，但如果参数可分离，就会将原来含参的函数转化成已知的函数。

例：若$\ln x+x\le ax^2\forall x>0$恒成立，求 $a$的取值范围。

解：

$$a\ge\left[\frac{\ln x+x}{x^2}\right]_{\max},\text{设}f(x)=\frac{\ln x+x}{x^2},f'(x)=\frac{1-2\ln x-x}{x^3}$$

分母恒大于零，分子递减，且$x=1$时分子为零

$\therefore x\in(0,1]$时$f'(x)\ge 0$, $x\in(1,+\infty)$时$f'(x)<0$

$\therefore f_{\max}(x)=f(1)=1$

$\therefore a\in[1,+\infty)$

2. 移项构造

有些可分离变量的形式求导后发现取得最值的点处无定义，这也是一种常见的形式。

例：$e^x-1\ge ax\forall x\in R$恒成立，求 $a$的取值范围。

本题只需考虑$x\ne 0$的情况，如采用分离变量，需分$x>0$和$x<0$讨论

$x>0$时，$a\le\left[\frac{e^x-1}{x}\right]_{\min}$,事实上，右式在$x=0$时取得最小值，而$\frac{0}{0}$无意义（高等数学中会用洛必达法则解决 这种问题）

但魔高一尺，道高一丈，这时我们不妨以其人之道还治其人之身，充分利用分数线上下都为零的优势：

$\text{设}f(x)=e^x-1-ax,f(x)\ge 0=f(0)$

$\therefore f'(0)=0\Rightarrow a=1$

这种方法巧妙取值，将本题秒杀。

注意：当定义域在取值点$x$两侧不连续时，不能等价成$f'(x)=0$。

例：$\ln(1+x)-\ln(1-x)-ax>0\forall x\in(0,1)$恒成立，求 $a$的取值范围。

本题中左边函数有零点$x=0$，但因为函数在此处不连续，不能使导数等于零。

$\text{设}f(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)-ax，f(x)>0=f(0),$

$\therefore f'(0)\ge 0\Rightarrow a\le 2$

以上步骤得出了一个必要条件，下面证明必要条件是充要条件。

事实上，当 $a\le 2$时

$f'(x)=\frac{2}{1-x^2}-a>2-a\ge 0$

$\therefore f(x)>f(0)=0$

这种先求出必要条件，再进一步证明的方法通常可以大大简化运算，节省时间。

3. 熟练掌握常用不等式

如 $1+x \le e^x, x \in R$　　$e^x \le \dfrac{1}{1-x}$，$x \in (-\infty,1)$　　$1-\dfrac{1}{x} \le \ln x \le x-1, x \in (0,+\infty)$ 等等。

4. 对于形如 $f(x)=ax^2+bx+c\ln x$ 的函数，常见题设为：已知该函数的两个极值点 $x_1 < x_2$，求 $f(x_1)$（或 $f(x_2)$）的最大值（或最小值）。

$f'(x)=\dfrac{2ax^2+bx+c}{x}$,由已知，　$\Delta > 0 \Rightarrow b^2 > 8ac$

同时又有 $2a{x_1}^2+bx_1+c=0$和$2a{x_2}^2+bx_2+c=0$

下面以讨论 $f(x_1)$的最值为例，揭示解决　此类问题的一般方法

$f(x_1)=a{x_1}^2+bx_1+c\ln x_1=a{x_1}^2+bx_1-(2a{x_1}^2+bx_1)\ln x_1$

设$g(x)=ax^2+bx-(2ax^2+bx)\ln x$

$g'(x)=(2ax+b)-(2ax^2+bx)\dfrac{1}{x}-(4ax+b)\ln x=-(4ax+b)\ln x$

我们发现化简后的形式　非常简单，而且根据　$x_1 < x_2$，$x_1 < -\dfrac{b}{4a}$,

结合 $a$的正负可判断 $(4ax+b)$的正负从而得知 $g'(x)$的正负。

5. 等价转化

当讨论函数零点或符号时，将已知符号部分提出，构造出熟悉形式。一般来说，形如 $f(x)=a\ln x+bx+cx^2+dx^3+e$ 的函数是我们喜欢的，因为求导之后可以将其转化为三次及以下函数问题。另外，同时遇到较为复杂的指数式时常常将其转化为对数式。

6. 不等式问题比较通项

导数题最后一问的设问常为下列形式：求证:$\sum_{i=1}^{n} f(n) > g(n)$

（$f(n)$和$g(n)$是关于 $n$的函数）

解决这种问题常用办法是考虑左右的通项，即证明 $f(n) > g(n)-g(n-1)$，通常要用到前几问的结论。难题是右边是常数。这时通常考虑将左侧放缩成$a\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n^2}$ 的形式，再利用 $\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n^2}$ 的放缩、列项构造出常数。

7. 不会做的题认真体会，总结规律

说了这么多，不是让大家现在就完全掌握，而是希望大家能够慢慢体会。愿大家能够游刃有余的玩转高中数学，取得令人满意的成绩！