2015－2016 学年度期末质量监控试卷

高一数学

A 卷 [必修 模块 4]　　本卷满分：100 分

题号	一	二	三			本卷总分
			17	18	19	
分数						

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的.

1. 如果θ是第三象限的角，那么（　　）

（A）$\sin\theta>0$　（B）$\cos\theta>0$　（C）$\tan\theta>0$　（D）以上都不对

2. 若向量$\boldsymbol{a}=(1,-2)$，$\boldsymbol{b}=(x,4)$满足$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则实数$x$等于（　　）

（A）8　（B）-8　（C）2　（D）-2

3. 若角α的终边经过点$(-4,3)$，则$\tan\alpha=$（　　）

（A）$\frac{4}{3}$　（B）$-\frac{4}{3}$　（C）$\frac{3}{4}$　（D）$-\frac{3}{4}$

4. 函数$f(x)=\sin(\frac{\pi}{2}-x)$是（　　）

（A）奇函数，且在区间$(0,\frac{\pi}{2})$上单调递增

（B）奇函数，且在区间$(0,\frac{\pi}{2})$上单调递减

（C）偶函数，且在区间$(0,\frac{\pi}{2})$上单调递增

（D）偶函数，且在区间$(0,\frac{\pi}{2})$上单调递减

5. 函数$f(x)=\sin x-\cos x$的图象（　　）

（A）关于直线$x=\frac{\pi}{4}$对称

（B）关于直线$x=-\frac{\pi}{4}$对称

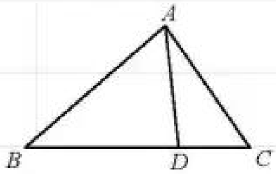
（C）关于直线$x=\frac{\pi}{2}$对称

（D）关于直线$x=-\frac{\pi}{2}$对称

6. 如图，在$\triangle ABC$中，点D在线段BC上，且$BD=2DC$，若$\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，则$\dfrac{\lambda}{\mu}=$（　　）

（A）$\dfrac{1}{2}$　　（B）$\dfrac{1}{3}$

（C）2　　（D）$\dfrac{2}{3}$



7. 定义在$\mathbf{R}$上，且最小正周期为π的函数是（　　）

（A）$y=\sin|x|$　　（B）$y=\cos|x|$　　（C）$y=|\sin x|$　　（D）$y=|\cos 2x|$

8. 设向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的模分别为2和3，且夹角为60°，则$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$等于（　　）

（A）$\sqrt{13}$　　（B）13　　（C）$\sqrt{19}$　　（D）19

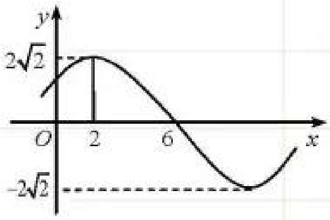
9. 函数$y=2\sqrt{2}\sin(\omega x+\varphi)$（其中$\omega>0$，$0<\varphi<\pi$）的图象的一部分如图所示，则（　　）

（A）$\omega=\dfrac{\pi}{8}$，$\varphi=\dfrac{3\pi}{4}$

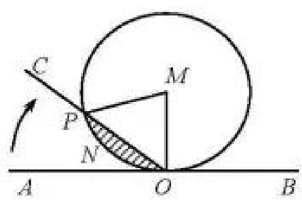
（B）$\omega=\dfrac{\pi}{8}$，$\varphi=\dfrac{\pi}{4}$

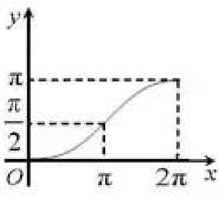
（C）$\omega=\dfrac{\pi}{4}$，$\varphi=\dfrac{\pi}{2}$

（D）$\omega=\dfrac{\pi}{4}$，$\varphi=\dfrac{3\pi}{4}$

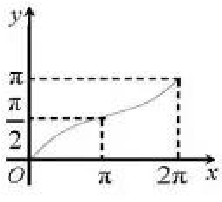


10. 如图，半径为1的∟M切直线AB于O点，射线OC从OA出发，绕着点O，顺时针方向旋转到OB，在旋转的过程中，OC交∟M于点P，记$\angle PMO=x$，弓形PNO（阴影部分）的面积$S=f(x)$，那么$f(x)$的图象是（　　）

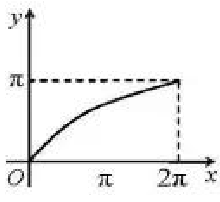




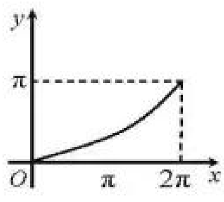
（A）



（B）



（C）



（D）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分. 把答案填在题中横线上.

11. 若向量 $\boldsymbol{a}=(-1,2)$ 与向量 $\boldsymbol{b}=(x,4)$ 平行，则实数 $x=$______.

12. 若 θ 为第四象限的角，且 $\sin\theta=-\dfrac{1}{3}$，则 $\cos\theta=$______；$\sin 2\theta=$______.

13. 将函数 $y=\cos 2x$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位，所得图象对应的函数表达式为______.

14. 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 均为单位向量，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 120°，则 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角等于______.

15. 已知 $\sin x+\sin y=\dfrac{1}{3},\cos x+\cos y=\dfrac{1}{5}$，则 $\cos(x-y)=$______.

16. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0,\varphi\in(0,\pi))$ 满足 $f(\dfrac{\pi}{6})=f(\dfrac{5\pi}{6})=0$，给出以下四个结论:

① $\omega=3$； ② $\omega\neq 6k$，$k\in\mathbf{N}^*$；

③ φ 可能等于 $\dfrac{3}{4}\pi$； ④符合条件的 ω 有无数个，且均为整数.

其中所有正确的结论序号是______.

三、解答题：本大题共 3 小题，共 36 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 12 分）

已知 $\varphi\in(0,\pi)$，且 $\tan(\varphi+\dfrac{\pi}{4})=-\dfrac{1}{3}$.

（Ⅰ）求 $\tan 2\varphi$ 的值；

（Ⅱ）求 $\dfrac{\sin\varphi+\cos\varphi}{2\cos\varphi-\sin\varphi}$ 的值.

18.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\cos x\cdot\cos(x-\dfrac{\pi}{3})$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的单调增区间；

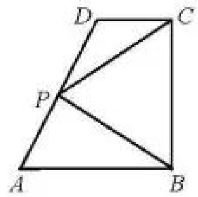
（Ⅱ）若直线 $y=a$ 与函数 $f(x)$ 的图象无公共点，求实数 a 的取值范围.

19.（本小题满分 12 分）

如图，在直角梯形 $ABCD$ 中，$AB//CD$，$AB\perp BC$，$AB=2$，$CD=1$，$BC=a(a>0)$，P 为线段 AD（含端点）上一个动点，设 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=y$，则得到函数 $y=f(x)$.

（Ⅰ）求 $f(1)$ 的值；

（Ⅱ）对于任意 $a\in(0,+\infty)$，求函数 $f(x)$ 的最大值.



B 卷　[学期综合]　　本卷满分：50 分

题号	一	二			本卷总分
		6	7	8	
分数					

一、填空题：本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分. 把答案填在题中横线上.

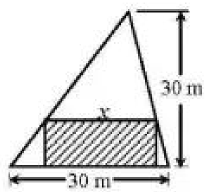
1. 设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\,|\,x<0\}$，$B=\{x\,|\,|x|>1\}$，则 $A\bigcap(\complement_U B)=$______.

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^{-2}, & x<0,\\ \ln x, & x>0,\end{cases}$ 若 $f(a)=2$，则实数 $a=$______.

3. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$是奇函数，且 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 是增函数，$f(3)=0$，则不等式 $f(x)>0$ 的解集为_____.

4. 函数 $f(x)=\left[\dfrac{x+1}{2}\right]-\left[\dfrac{x}{2}\right](x\in\mathbf{N})$ 的值域为_____.（其中$[x]$表示不大于 x 的最大整数，例如$[3.15]=3$，$[0.7]=0$.）

5. 在如图所示的三角形空地中，欲建一个面积不小于 200 m^2 的内接矩形花园（阴影部分），则其边长 x（单位：m）的取值范围是______.



二、解答题：本大题共 3 小题，共 30 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

6.（本小题满分 10 分）

已知函数 $f(x)=\log_4\dfrac{x-1}{x+1}$.

（Ⅰ）若 $f(a)=\dfrac{1}{2}$，求 a 的值；

（Ⅱ）判断函数 $f(x)$ 的奇偶性，并证明你的结论.

7.（本小题满分 10 分）

已知函数 $f(x)=3^x$，$g(x)=|x+a|-3$，其中 $a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）若函数 $h(x)=f[g(x)]$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称，求 a 的值；

（Ⅱ）给出函数 $y=g[f(x)]$ 的零点个数，并说明理由.

8.（本小题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 的定义域为 R，如果存在函数 $g(x)$，使得 $f(x)\geqslant g(x)$ 对于一切实数 x 都成立，那么称 $g(x)$ 为函数 $f(x)$ 的一个承托函数.

已知函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图象经过点 $(-1,0)$.

（Ⅰ）若 $a=1$，$b=2$. 写出函数 $f(x)$ 的一个承托函数（结论不要求注明）；

（Ⅱ）判断是否存在常数 a,b,c，使得 $y=x$ 为函数 $f(x)$ 的一个承托函数，且 $f(x)$ 为函数 $y=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}$ 的一个承托函数？若存在，求出 a,b,c 的值；若不存在，说明理由.

北京市西城区 2016 — 2017 学年度第一学期期末试卷

高一数学参考答案及评分标准　　2017.1

A 卷 [必修 模块 4]　满分 100 分

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.

1. C　2. A　3. D　4. D　5. B　6. A　7. C　8. C　9. B　10. A.

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分.

11. -2　　12. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$-\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$　　13. $y=\cos(2x+\dfrac{\pi}{2})$（或 $y=-\sin 2x$）

14. 150°　　15. $-\dfrac{208}{225}$　　16. ②③

注：第 16 题少选得 2 分，多选、错选不得分.

三、解答题：本大题共 3 小题，共 36 分.

17.（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）由 $\tan(\varphi+\dfrac{\pi}{4})=-\dfrac{1}{3}$，得 $\dfrac{\tan\varphi+1}{1-\tan\varphi}=-\dfrac{1}{3}$，　……………… 3 分

解得 $\tan\varphi=-2$.　……………… 5 分

所以 $\tan 2\varphi=\dfrac{2\tan\varphi}{1-\tan^2\varphi}=\dfrac{4}{3}$.　……………… 8 分

（Ⅱ）由 $\tan\varphi=-2$，得 $\cos\varphi\neq 0$.

将分式 $\dfrac{\sin\varphi+\cos\varphi}{2\cos\varphi-\sin\varphi}$ 的分子分母同时除以 $\cos\varphi$,

得 $\dfrac{\sin\varphi+\cos\varphi}{2\cos\varphi-\sin\varphi}=\dfrac{\tan\varphi+1}{2-\tan\varphi}=-\dfrac{1}{4}$.　……………… 12 分

18.（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）$f(x)=\cos x\cdot\cos(x-\dfrac{\pi}{3})$

$=\cos x\cdot(\cos x\cos\dfrac{\pi}{3}+\sin x\sin\dfrac{\pi}{3})$　……………… 2 分

$=\dfrac{1}{2}\cos^2 x+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x$　……………… 3 分

$=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x+\dfrac{1}{4}\cos 2x+\dfrac{1}{4}$　……………… 4 分

$=\dfrac{1}{2}\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})+\dfrac{1}{4}$， ………………6 分

由 $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\leqslant 2x+\dfrac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，得 $k\pi-\dfrac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\dfrac{\pi}{6}$，

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[k\pi-\dfrac{\pi}{3}, k\pi+\dfrac{\pi}{6}], (k\in \mathrm{Z})$. ………………8 分

（Ⅱ）因为 $\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})\in[-1,1]$，

所以函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})+\dfrac{1}{4}$ 的值域为 $[-\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}]$. ………………10 分

因为直线 $y=a$ 与函数 $f(x)$ 的图象无公共点，

所以 $a\in(-\infty,-\dfrac{1}{4})\cup(\dfrac{3}{4},+\infty)$. ………………12 分

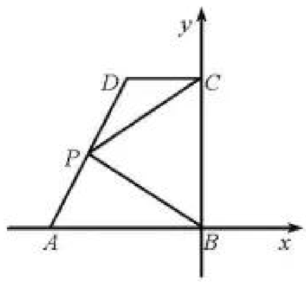
19.（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）如图，以点 B 为原点，以 AB，BC 所在的直线分别为 x，y 轴建立直角坐标系，

则 $B(0,0)$，$A(-2,0)$，$C(0,a)$，$D(-1,a)$，$\overrightarrow{AD}=(1,a)$，$\overrightarrow{AB}=(2,0)$，$\overrightarrow{BC}=(0,a)$.

………………2 分

由 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AD}$，得 $\overrightarrow{AP}=(x,ax)$.



所以 $\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}=(2-x,-ax)$，

$\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BC}=(2-x,a-ax)$. ………4 分

所以 $y=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=(2-x)^2-a^2x+a^2x^2$，

即 $f(x)=(a^2+1)x^2-(a^2+4)x+4$. ………………6 分

所以 $f(1)=1$. ………………7 分

（注：若根据数量积定义，直接得到 $f(1)=1$，则得 3 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ），知函数 $f(x)=(a^2+1)x^2-(a^2+4)x+4$ 为二次函数，其图象开口向上，

且对称轴为 $x=\dfrac{a^2+4}{2(a^2+1)}$， ………………8 分

因为对称轴 $x=\dfrac{a^2+4}{2(a^2+1)}=\dfrac{(a^2+1)+3}{2(a^2+1)}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2(a^2+1)}>\dfrac{1}{2}$，$x\in[0,1]$， ……10 分

所以当 $x=0$ 时，$f(x)$ 取得最大值 $f(0)=4$. ………………12 分

B卷　[学期综合]　满分50分

一、填空题：本大题共5小题，每小题4分，共20分.

1. $[-1,0)$　　2. $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 或 e^2　　3. $(-3,0)\cup(3,+\infty)$　　4. $\{0,1\}$　　5. $[10,20]$

注：第2题少解不得分.

二、解答题：本大题共3小题，共30分.

6.（本小题满分10分）

解：（Ⅰ）由 $f(a)=\log_4\dfrac{a-1}{a+1}=\dfrac{1}{2}$，得 $\dfrac{a-1}{a+1}=2$，　………………2分

解得 $a=-3$.　………………4分

（Ⅱ）由函数 $f(x)=\log_4\dfrac{x-1}{x+1}$ 有意义，得 $\dfrac{x-1}{x+1}>0$.　………………5分

所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x\mid x>1$，或 $x<-1\}$.　………………6分

因为 $f(-x)=\log_4\dfrac{-x-1}{-x+1}=\log_4(\dfrac{x-1}{x+1})^{-1}=-\log_4\dfrac{x-1}{x+1}=-f(x)$，

所以 $f(-x)=-f(x)$，

即函数 $f(x)$ 为奇函数.　………………10分

7.（本小题满分10分）

解：（Ⅰ）由函数 $f(x)=3^x$，$g(x)=|x+a|-3$，

得函数 $h(x)=f[g(x)]=3^{|x+a|-3}$.　………………1分

因为函数 $h(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称，

所以 $h(0)=h(4)$，即 $3^{|a|-3}=3^{|a+4|-3}$，

解得 $a=-2$.　………………3分

（Ⅱ）**方法一**：由题意，得 $g[f(x)]=|3^x+a|-3$.

由 $g[f(x)]=|3^x+a|-3=0$，得 $|3^x+a|=3$，　………………5分

当 $a\geqslant 3$ 时，

由 $3^x>0$，得 $3^x+a>3$，

所以方程 $|3^x+a|=3$ 无解，

即函数 $y=g[f(x)]$ 没有零点； ··················6 分

当 $-3\leqslant a<3$ 时，

因为 $y=3^x+a$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，值域为 $(a,+\infty)$，且 $-3\leqslant a<3$，

所以有且仅有一个 x_0 使得 $3^{x_0}+a=3$，且对于任意的 x，都有 $3^x+a\neq-3$，

所以函数 $y=g[f(x)]$ 有且仅有一个零点； ··················8 分

当 $a<-3$ 时，

因为 $y=3^x+a$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，值域为 $(a,+\infty)$，且 $a<-3$，

所以有且仅有一个 x_0 使得 $3^{x_0}+a=3$，有且仅有一个 x_1 使得 $3^{x_1}+a=-3$，

所以函数 $y=g[f(x)]$ 有两个零点.

综上，当 $a\geqslant3$ 时，函数 $y=g[f(x)]$ 没有零点； 当 $-3\leqslant a<3$ 时，函数 $y=g[f(x)]$ 有且仅有一个零点；当 $a<-3$ 时，函数 $y=g[f(x)]$ 有两个零点. ··················10 分

方法二：由题意，得 $g[f(x)]=|3^x+a|-3$.

由 $g[f(x)]=|3^x+a|-3=0$，得 $|3^x+a|=3$， ··················5 分

即 $3^x+a=3$，或 $3^x+a=-3$，

整理，得 $3^x=3-a$，或 $3^x=-3-a$.

① 考察方程 $3^x=3-a$ 的解，

由函数 $y=3^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，且值域为 $(0,+\infty)$，

得当 $3-a>0$，即 $a<3$ 时，方程 $3^x=3-a$ 有且仅有一解；当 $3-a\leqslant0$，即 $a\geqslant3$ 时，方程 $3^x=3-a$ 有无解； ··················7 分

② 考察方程 $3^x=-3-a$ 的解，

由函数 $y=3^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，且值域为 $(0,+\infty)$，

得当 $-3-a>0$，即 $a<-3$ 时，方程 $3^x=-3-a$ 有且仅有一解；当 $-3-a\leqslant0$，即 $a\geqslant-3$ 时，方程 $3^x=-3-a$ 有无解. ··················9 分

综上，当 $a\geqslant 3$ 时，函数 $y=g[f(x)]$ 没有零点；当 $-3\leqslant a<3$ 时，函数 $y=g[f(x)]$ 有且仅有一个零点；当 $a<-3$ 时，函数 $y=g[f(x)]$ 有两个零点. ……………………10 分

注：若根据函数图象便得出答案，请酌情给分，没有必要的文字说明减 2 分.

8.（本小题满分 10 分）

解：（Ⅰ）答案不唯一，如函数 $y=0$，$y=x$ 等. ……………………3 分

（Ⅱ）因为函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图象经过点 $(-1,0)$，

所以 $a-b+c=0$. ①

因为 $y=x$ 为函数 $f(x)$ 一个承托函数，且 $f(x)$ 为函数 $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$ 的一个承托函数，

所以 $x\leqslant f(x)\leqslant \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立.

所以 $1\leqslant f(1)\leqslant 1$，即 $f(1)=a+b+c=1$. ② ……………………5 分

由①②，得 $b=\frac{1}{2}$，$a+c=\frac{1}{2}$. ……………………6 分

所以 $f(x)=ax^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}-a$.

由 $f(x)\geqslant x$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，得 $ax^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}-a\geqslant 0$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立.

当 $a=0$ 时，得 $-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\geqslant 0$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，显然不正确； ……………………7 分

当 $a\neq 0$ 时，由题意，得 $\begin{cases}a>0,\\ \Delta=\frac{1}{4}-4a(\frac{1}{2}-a)\leqslant 0,\end{cases}$ 即 $(4a-1)^2\leqslant 0$，

所以 $a=\frac{1}{4}$. ……………………9 分

代入 $f(x)\leqslant \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$，得 $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\geqslant 0$，

化简，得 $(x-1)^2\geqslant 0$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，符合题意.

综上，当 $a \geqslant 3$ 时，函数 $y = g[f(x)]$ 没有零点；当 $-3 \leqslant a < 3$ 时，函数 $y = g[f(x)]$ 有且仅有一个零点；当 $a < -3$ 时，函数 $y = g[f(x)]$ 有两个零点. ……………………10 分

注：若根据函数图象便得出答案，请酌情给分，没有必要的文字说明减 2 分.

8.（本小题满分 10 分）

解：（Ⅰ）答案不唯一，如函数 $y=0$， $y=x$ 等. ……………………3 分

（Ⅱ）因为函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图象经过点 $(-1,0)$，

所以 $a-b+c=0$. ①

因为 $y=x$ 为函数 $f(x)$ 一个承托函数，且 $f(x)$ 为函数 $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$ 的一个承托函数，

所以 $x \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立.

所以 $1 \leqslant f(1) \leqslant 1$，即 $f(1)=a+b+c=1$. ② ……………………5 分

由①②，得 $b=\frac{1}{2}$ ，$a+c=\frac{1}{2}$. ……………………6 分

所以 $f(x)=ax^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}-a$.

由 $f(x) \geqslant x$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立，得 $ax^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}-a \geqslant 0$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立.

当 $a=0$ 时，得 $-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \geqslant 0$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立，显然不正确； ……………………7 分

当 $a \neq 0$ 时，由题意，得 $\begin{cases} a>0, \\ \Delta=\frac{1}{4}-4a(\frac{1}{2}-a) \leqslant 0, \end{cases}$ 即 $(4a-1)^2 \leqslant 0$，

所以 $a=\frac{1}{4}$. ……………………9 分

代入 $f(x) \leqslant \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$，得 $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4} \geqslant 0$，

化简，得 $(x-1)^2 \geqslant 0$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立，符合题意.

所以$a=\dfrac{1}{4}$，$b=\dfrac{1}{2}$，$c=\dfrac{1}{4}$. ··················10分