

观察法找数列通项公式

【观察法】(关键是找出各项与项数 n 的关系: 横向看各项之间的关系结构, 纵向看各项与项数 n 的内在联系, 从而归纳出数列的通项公式。)

例 1、根据下面各数列前几项的值, 写出数列的一个通项公式:

(1) $-1, 7, -13, 19, \dots$;

(2) $\frac{2}{3}, \frac{4}{15}, \frac{6}{35}, \frac{8}{63}, \frac{10}{99}, \dots$;

(3) $\frac{1}{2}, 2, \frac{9}{2}, 8, \frac{25}{2}, \dots$;

(4) $5, 55, 555, 5555, \dots$.

解 (1) 偶数项为正, 奇数项为负, 故通项公式必含有因式 $(-1)^n$, 观察各项的绝对值, 后一项的绝对值总比它前一项的绝对值大 6, 故数列的一个通项公式为 $a_n = (-1)^n(6n-5)$.

(2) 这是一个分数数列, 其分子构成偶数数列, 而分母可分解为 $1 \times 3, 3 \times 5, 5 \times 7, 7 \times 9, 9 \times 11, \dots$, 每一项都是两个相邻奇数的乘积. 知所求数列的一个通项公式为 $a_n = \frac{2n}{(2n-1)(2n+1)}$.

(3) 数列的各项, 有的是分数, 有的是整数, 可将数列的各项都统一成分数再观察. 即 $\frac{1}{2}, \frac{4}{2}, \frac{9}{2}, \frac{16}{2}, \frac{25}{2}, \dots$, 从而可得数列的一个通项公式为 $a_n = \frac{n^2}{2}$.

(4) 将原数列改写为 $\frac{5}{9} \times 9, \frac{5}{9} \times 99, \frac{5}{9} \times 999, \dots$, 易知数列 $9, 99, 999, \dots$ 的通项为 $10^n - 1$,

故所求的数列的一个通项公式为 $a_n = \frac{5}{9}(10^n - 1)$.

例 2、数列 $0, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \dots$ 的一个通项公式为().

A. $a_n = \frac{n-1}{n+1} (n \in \mathbf{N}^*)$.

B. $a_n = \frac{n-1}{2n+1} (n \in \mathbf{N}^*)$

C. $a_n = \frac{2(n-1)}{2n-1} (n \in \mathbf{N}^*)$

D. $a_n = \frac{2n}{2n+1} (n \in \mathbf{N}^*)$

解析 将 0 写成 $\frac{0}{1}$, 观察数列中每一项的分子、分母可知, 分子为偶数列, 可表

示为 $2(n-1)$, $n \in \mathbf{N}^*$; 分母为奇数列, 可表示为 $2n-1$, $n \in \mathbf{N}^*$, 故选 C.

练习 1: 根据数列的前 4 项, 写出它的一个通项公式:

(1) 9, 99, 999, 9999, ...

(2) $1\frac{1}{2}$, $2\frac{4}{5}$, $3\frac{9}{10}$, $4\frac{16}{17}$, ...

(3) $1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \dots$

(4) $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \dots$

答案: (1) $a_n = 10^n - 1$ (2) $a_n = n + \frac{n^2}{n^2 + 1}$; (3) $a_n = \frac{2}{n+1}$; (4)

$$a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{n+1}.$$