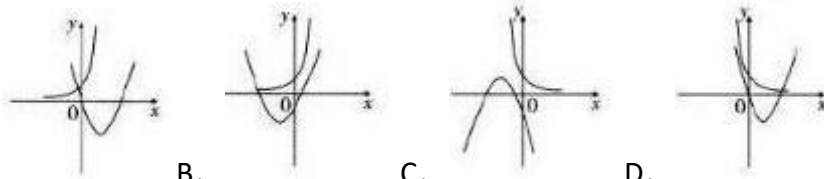


2017-2018 学年高一（上）期中数学试卷

一、选择题（每题 5 分，共 60 分）

1. 方程组 $\begin{cases} x+y=1 \\ x^2-y^2=9 \end{cases}$ 的解集是 ()
 A. $\{(5, 4)\}$ B. $\{(-5, -4)\}$ C. $\{(-5, 4)\}$ D. $\{(5, -4)\}$
2. $x \in \mathbb{R}$, 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 表示同一函数的是 ()
 A. $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x^2}$ B. $f(x) = 1$, $g(x) = (x-1)^0$
 C. $f(x) = \frac{(\sqrt{x})^2}{x}$, $g(x) = \frac{x}{(\sqrt{x})^2}$ D. $f(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$, $g(x) = x-3$
3. 若函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[0, 2]$, 则函数 $g(x) = \frac{f(2x)}{x-1}$ 的定义域是 ()
 A. $[0, 1]$ B. $[0, 1)$ C. $[0, 1) \cup (1, 4]$ D. $(0, 1)$
4. 已知 $A = \{x | x \geq 1\}$, $B = \{x | \frac{1}{2} \leq x \leq 2a-1\}$, 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 则实数 a 的取值范围是 ()
 A. $[1, +\infty)$ B. $[\frac{1}{2}, 1]$ C. $[\frac{2}{3}, +\infty)$ D. $(1, +\infty)$
5. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x+1 & (x < 1) \\ -x+3 & (x \geq 1) \end{cases}$, 则 $f[f(\frac{5}{2})] =$ ()
 A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{5}{2}$ C. $\frac{9}{2}$ D. $\frac{3}{2}$
6. 已知 $f(x) = x^5 + \frac{a}{x^3} + bx - 8$, 且 $f(-2) = 10$, 则 $f(2) =$ ()
 A. -26 B. -18 C. -10 D. 10
7. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数, 它在 $[0, +\infty)$ 上递增, 那么一定有 ()
 A. $f(\frac{3}{4}) < f(a^2-a+1)$ B. $f(\frac{3}{4}) \leq f(a^2-a+1)$ C. $f(\frac{3}{4}) > f(a^2-a+1)$
 D. $f(\frac{3}{4}) \geq f(a^2-a+1)$
8. 若偶函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递减, 且 $a=f(\frac{2}{5})$, $b=f(\frac{2}{3})$, $c=f(\frac{1}{3})$, 则下列不等式成立的是 ()
 A. $a < b < c$ B. $b < a < c$ C. $c < a < b$ D. $c < b < a$
9. 函数 $y=a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 与函数 $y=(a-1)x^2 - 2x - 1$ 在同一坐标系内的图

象可能是 ()



A.

B.

C.

D.

10. 若函数 $y=x^2-6x+8$ 的定义域为 $x \in [1, a]$, 值域为 $[-1, 3]$, 则 a 的取值范围是 ()

A. $(1, 3)$ B. $(1, 5)$ C. $(3, 5)$ D. $[3, 5]$

11. 若 $x \in (-\infty, -1]$ 时, 不等式 $(m^2 - m) \cdot 4^x - 2^x < 0$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是 ()

A. $(-2, 1)$ B. $(-4, 3)$ C. $(-1, 2)$ D. $(-3, 4)$

12. 定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 当 $x < 0$ 时, $f(x) > 0$, 则函数 $f(x)$ 在 $[m, n]$ 上有 ()

A. 最小值 $f(m)$ B. 最大值 $f(n)$ C. 最小值 $f(n)$ D. 最大值 $f(\frac{m+n}{2})$

二、填空题 (每小题 5 分, 共 20 分)

13. 集合 $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{x | 2 \leq x \leq 5\}$, 则 $A \cap B =$ _____.

14. 已知 $f(\sqrt{x}-1) = x+2\sqrt{x}$, 则 $f(x) =$ _____.

15. 当 $0 < x < 1$ 时, 幂函数 $y=x^p$ 的图象在直线 $y=x$ 的上方, 则 p 的取值范围是_____.

16. 下列说法正确的是_____.

①任意 $x \in \mathbb{R}$, 都有 $3^x > 2^x$;

②若 $a > 0$, 且 $a \neq 1$, $M > 0$, $N > 0$, 则有 $\log_a(M+N) = \log_a M \cdot \log_a N$;

③ $y = (\frac{1}{2})^{|x|}$ 的最大值为 1;

④在同一坐标系中, $y=2^x$ 与 $y=(\frac{1}{2})^x$ 的图象关于 y 轴对称.

三、解答题 (共 70 分)

17. (10 分) 已知集合 $A = \{1, 3, x^2\}$, $B = \{1, 2-x\}$, 且 $B \subseteq A$.

(1) 求实数 x 的值;

(2) 若 $B \cup C = A$, 求集合 C .

18. (12 分) 化简下列各式

$$(1) \left(\frac{5}{6}a^{\frac{1}{3}}b^{-2}\right) \cdot (-3a^{-\frac{1}{2}}b^{-1}) \div (4a^{\frac{2}{3}}b^{-3})^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{ab}$$

$$(2) \frac{\lg\sqrt{27} + \lg 8 - 3\lg\sqrt{10}}{\lg 1.2}.$$

19. (12 分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x}, & x < 1 \\ \log_4 x, & x \geq 1 \end{cases}$.

(1) 求 $f(0)$, $f(2)$, $f(f(3))$ 的值;

(2) 求不等式 $f(x) \leq 2$ 的解集.

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{2^x - a}{2^x + 1}$ 是奇函数 (a 为常数).

(1) 求 a 的值;

(2) 解不等式 $f(x) < \frac{3}{5}$.

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = \log_a(3 - ax)$.

(1) 当 $x \in [0, \frac{3}{2}]$ 时, 函数 $f(x)$ 恒有意义, 求实数 a 的取值范围;

(2) 是否存在这样的实数 a , 使得函数 $f(x)$ 在区间 $[2, 3]$ 上为增函数, 并且 $f(x)$ 的最大值为 1. 如果存在, 试求出 a 的值; 如果不存在, 请说明理由.

22. (12 分) 已知 $f(x)$ 是定义在 $[-2, 2]$ 上的奇函数, 且 $f(2) = 3$, 若对任意的 $m, n \in [-2, 2]$, $m+n \neq 0$, 都有 $\frac{f(m)+f(n)}{m+n} > 0$.

(1) 若 $f(2a-1) < f(a^2-2a+2)$, 求实数 a 的取值范围;

(2) 若不等式 $f(x) \leq (5-2a)t+1$ 对任意 $x \in [-2, 2]$ 和 $a \in [-1, 2]$ 都恒成立, 求实数 t 的取值范围.

2017-2018 学年高一（上）期中数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（每题 5 分，共 60 分）

1. 方程组 $\begin{cases} x+y=1 \\ x^2-y^2=9 \end{cases}$ 的解集是（ ）

A. $\{(5, 4)\}$ B. $\{(-5, -4)\}$ C. $\{(-5, 4)\}$ D. $\{(5, -4)\}$

【分析】把直线方程代入双曲线方程消去 y 后求得 x ，代入直线方程求得 y 。

【解答】解：把直线方程代入双曲线方程得 $x^2 - (x - 1)^2 = 9$ ，整理得 $2x = 10$ ， $x = 5$
 $x = 5$ 代入直线方程求得 $y = -5 + 1 = -4$

故方程组的解集为 $\{5, -4\}$ ，

故选 D

【点评】本题主要考查了直线与双曲线的关系．涉及交点问题一般是把直线方程与圆锥曲线的方程联立，通过解方程组求解。

2. $x \in \mathbb{R}$ ，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 表示同一函数的是（ ）

A. $f(x) = x^2$ ， $g(x) = \sqrt{x^2}$ B. $f(x) = 1$ ， $g(x) = (x - 1)^0$

C. $f(x) = \frac{(\sqrt{x})^2}{x}$ ， $g(x) = \frac{x}{(\sqrt{x})^2}$ D. $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$ ， $g(x) = x - 3$

【分析】根据两函数的定义域相同，对应法则也相同，即可判断它们是同一函数。

【解答】解：对于 A， $f(x) = x^2$ ($x \in \mathbb{R}$)， $g(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ ($x \in \mathbb{R}$)，两函数对应关系不同，不是同一函数；

对于 B， $f(x) = 1$ ($x \in \mathbb{R}$)， $g(x) = (x - 1)^0 = 1$ ($x \neq 1$)，两函数的定义域不同，不是同一函数；

对于 C， $f(x) = \frac{(\sqrt{x})^2}{x} = 1$ ($x > 0$)， $g(x) = \frac{x}{(\sqrt{x})^2} = 1$ ($x > 0$)，两函数的定义域

相同，对应关系也相同，是同一函数；

对于 D, $f(x) = \frac{x^2-9}{x+3} = x-3 (x \neq -3)$, $g(x) = x-3 (x \in \mathbb{R})$, 两函数的定义域不同, 不是同一函数.

故选: C.

【点评】本题考查了判断两个函数是否为同一函数的应用问题, 是基础题.

3. 若函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[0, 2]$, 则函数 $g(x) = \frac{f(2x)}{x-1}$ 的定义域是 ()

A. $[0, 1]$ B. $[0, 1)$ C. $[0, 1) \cup (1, 4]$ D. $(0, 1)$

【分析】根据 $f(2x)$ 中的 $2x$ 和 $f(x)$ 中的 x 的取值范围一样得到: $0 \leq 2x \leq 2$, 又分式中分母不能是 0, 即: $x-1 \neq 0$, 解出 x 的取值范围, 得到答案.

【解答】解: 因为 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 2]$, 所以对 $g(x)$, $0 \leq 2x \leq 2$ 且 $x \neq 1$, 故 $x \in [0, 1)$,

故选 B.

【点评】本题考查求复合函数的定义域问题.

4. 已知 $A = \{x | x \geq 1\}$, $B = \{x | \frac{1}{2} \leq x \leq 2a-1\}$, 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $[1, +\infty)$ B. $[\frac{1}{2}, 1]$ C. $[\frac{2}{3}, +\infty)$ D. $(1, +\infty)$

【分析】由 $A = \{x | x \geq 1\}$, $B = \{x | \frac{1}{2} \leq x \leq 2a-1\}$, $A \cap B \neq \emptyset$, 列出不等式能求出实数 a 的取值范围.

【解答】解: $\because A = \{x | x \geq 1\}$, $B = \{x | \frac{1}{2} \leq x \leq 2a-1\}$, $A \cap B \neq \emptyset$,

$\therefore 2a-1 \geq 1$, 解得 $a \geq 1$,

$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $[1, +\infty)$.

故选: A.

【点评】本题考查实数的取值范围的求法, 考查交集性质等基础知识, 考查运算求解能力, 考查函数与方程思想, 是基础题.

5. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x+1 & (x < 1) \\ -x+3 & (x \geq 1) \end{cases}$, 则 $f[f(\frac{5}{2})] = ()$

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{5}{2}$ C. $\frac{9}{2}$ D. $\frac{3}{2}$

【分析】由已知中函数 $f(x) = \begin{cases} x+1 & (x < 1) \\ -x+3 & (x \geq 1) \end{cases}$ ，将 $x = \frac{5}{2}$ ，代入可得 $f[f(\frac{5}{2})]$ 的值。

【解答】解：∵ 函数 $f(x) = \begin{cases} x+1 & (x < 1) \\ -x+3 & (x \geq 1) \end{cases}$ ，

$$\therefore f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{5}{2} + 3 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore f\left[f\left(\frac{5}{2}\right)\right] = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2},$$

故选：D

【点评】本题考查的知识点是分段函数的应用，函数求值，难度中档。

6. 已知 $f(x) = x^5 + \frac{a}{x^3} + bx - 8$ ，且 $f(-2) = 10$ ，则 $f(2) = (\quad)$

- A. -26 B. -18 C. -10 D. 10

【分析】设 $f(x) = g(x) - 8$ ，则 $g(x)$ 为奇函数，求得 $g(2)$ 的值，可得 $f(2)$ 的值。

【解答】解：设 $f(x) = x^5 + \frac{a}{x^3} + bx - 8 = g(x) - 8$ ，∴ $g(x)$ 为奇函数，

由 $f(-2) = g(-2) - 8 = 10$ ，可得 $g(-2) = -g(2) = 18$ ，故 $g(2) = -18$ 。

则 $f(2) = g(2) - 8 = -18 - 8 = -26$ ，

故选：A。

【点评】本题主要考查函数的奇偶性的应用，属于基础题。

7. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数，它在 $[0, +\infty)$ 上递增，那么一定有 $(\quad)$

- A. $f(\frac{3}{4}) < f(a^2 - a + 1)$ B. $f(\frac{3}{4}) \leq f(a^2 - a + 1)$ C. $f(\frac{3}{4}) > f(a^2 - a + 1)$
D. $f(\frac{3}{4}) \geq f(a^2 - a + 1)$

【分析】由已知中 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上递增，结合 $a^2 - a + 1 = (a - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$ 得到答案。

【解答】解：∵ $a^2 - a + 1 = (a - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$ ， $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上递增，

$$\therefore f(\frac{3}{4}) \leq f(a^2 - a + 1),$$

故选：B

【点评】本题考查的知识点是抽象函数的应用，函数的单调性，利用配方法得到 $a^2 - a + 1 \geq \frac{3}{4}$ 是解答的关键.

8. 若偶函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递减，且 $a=f(\frac{2}{5})$, $b=f(\frac{2}{3})$, $c=f(\frac{1}{3})$ ，则下列不等式成立的是（ ）

A. $a < b < c$ B. $b < a < c$ C. $c < a < b$ D. $c < b < a$

【分析】根据题意，由偶函数的性质分析可得 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增，又由 $\frac{1}{3} < \frac{2}{5} < \frac{2}{3}$ ，分析可得答案.

【解答】解：根据题意，偶函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递减，则函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增，

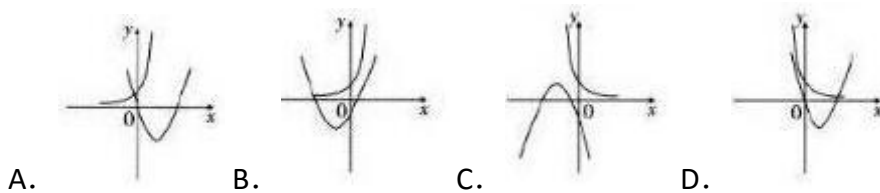
又由 $\frac{1}{3} < \frac{2}{5} < \frac{2}{3}$ ，

则有 $c < a < b$ ，

故选：C.

【点评】本题考查函数的奇偶性与单调性的综合应用，关键是分析得到函数在 $[0, +\infty)$ 上的单调性.

9. 函数 $y=a^x$ ($a>0$ 且 $a \neq 1$) 与函数 $y=(a-1)x^2 - 2x - 1$ 在同一坐标系内的图象可能是（ ）



【分析】讨论 a 的范围，判断函数的单调性，和二次函数的开口方向和对称轴的位置，从而得出答案.

【解答】解：若 $0 < a < 1$ ，则指数函数 $y=a^x$ 是减函数，

二次函数 $y=(a-1)x^2 - 2x - 1$ 开口向下，对称轴为 $x=\frac{1}{a-1} < 0$ ，排除 D；

若 $a > 1$ ，则指数函数 $y=a^x$ 是增函数，

二次函数 $y = (a - 1)x^2 - 2x - 1$ 开口向上，对称轴为 $x = \frac{1}{a-1} > 0$ ，排除 B；

又二次函数 $y = (a - 1)x^2 - 2x - 1$ 与 y 轴交点为 $(0, -1)$ ，排除 A；

故选 C.

【点评】 本题考查了指数函数与二次函数的图象，属于中档题.

10. 若函数 $y = x^2 - 6x + 8$ 的定义域为 $x \in [1, a]$ ，值域为 $[-1, 3]$ ，则 a 的取值范围是 ()

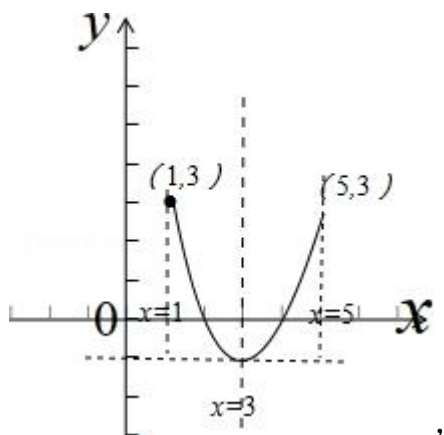
A. $(1, 3)$ B. $(1, 5)$ C. $(3, 5)$ D. $[3, 5]$

【分析】 根据二次函数的性质，画出函数的图象，从而得出答案.

【解答】 解： $\because y = x^2 - 6x + 8 = (x - 3)^2 - 1$,

对称轴 $x = 3$ ，与 x 轴的交点为： $(2, 0)$ ， $(4, 0)$ ，

画出函数的图象： 如图示：



$\because$ 函数的值域为 $[-1, 3]$ ，

$\therefore 3 \leq a \leq 5$ ，

故选： D.

【点评】 本题考查了二次函数的性质，考查了数形结合思想，是一道基础题.

11. 若 $x \in (-\infty, -1]$ 时，不等式 $(m^2 - m) \cdot 4^x - 2^x < 0$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是 ()

A. $(-2, 1)$ B. $(-4, 3)$ C. $(-1, 2)$ D. $(-3, 4)$

【分析】 由题意可得 $(m^2 - m) < \frac{2^x}{4^x} = \frac{1}{2^x}$ 在 $x \in (-\infty, -1]$ 时恒成立，则只要

$(m^2 - m) < \frac{1}{2^x}$ 的最小值, 然后解不等式可 m 的范围

【解答】解: $\because (m^2 - m) 4^x - 2^x < 0$ 在 $x \in (-\infty, -1]$ 时恒成立

$\therefore (m^2 - m) < \frac{2^x}{4^x} = \frac{1}{2^x}$ 在 $x \in (-\infty, -1]$ 时恒成立

由于 $f(x) = \frac{1}{2^x}$ 在 $x \in (-\infty, -1]$ 时单调递减

$\therefore x \leq -1,$

$\therefore f(x) \geq 2$

$\therefore m^2 - m < 2$

$\therefore -1 < m < 2$

故选 C

【点评】本题主要考查了函数的恒成立问题 $m \leq f(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow m \leq f(x)$ 得最小值 ($m \geq f(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow m \geq f(x)$ 的最大值), 体现出函数恒成立与最值的相互转化.

12. 定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 当 $x < 0$ 时, $f(x) > 0$, 则函数 $f(x)$ 在 $[m, n]$ 上有 ()

A. 最小值 $f(m)$ B. 最大值 $f(n)$ C. 最小值 $f(n)$ D. 最大值 $f(\frac{m+n}{2})$

【分析】利用赋值法证明 $f(x)$ 的单调性, 即可判断函数 $f(x)$ 在 $[m, n]$ 的最值情况.

【解答】解: 函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 定义为 R .

令 $x=y=0$, 则 $f(0) = f(0) + f(0)$, 所以 $f(0) = 0$;

再令 $y = -x$, 代入原式得 $f(0) = f(x) + f(-x) = 0$, 所以 $f(-x) = -f(x)$, 故该函数为奇函数且图象过原点;

设 $x < y$, 则 $x - y < 0$

那么 $f(x - y) > 0$,

得: $f(x) = f(x - y + y) = f(x - y) + f(y)$

即 $f(x) - f(y) > 0$.

$\therefore f(x)$ 是 R 上的减函数.

则函数 $f(x)$ 在 $[m, n]$ 上有最大值为 $f(m)$ ，最小值为 $f(n)$ 。

故选：C。

【点评】本题考查了抽象函数的奇偶性、单调性求最值的方法

二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

13. 集合 $A=\{1, 3, 5, 7\}$ ， $B=\{x|2\leq x\leq 5\}$ ，则 $A\cap B=\underline{\{3, 5\}}$ 。

【分析】利用交集定义直接求解。

【解答】解： $\because$ 集合 $A=\{1, 3, 5, 7\}$ ， $B=\{x|2\leq x\leq 5\}$ ，

$\therefore A\cap B=\{3, 5\}$ 。

故答案为： $\{3, 5\}$ 。

【点评】本题考查交集的求法，是基础题，解题时要认真审题，注意交集定义的合理运用。

14. 已知 $f(\sqrt{x}-1)=x+2\sqrt{x}$ ，则 $f(x)=\underline{x^2+4x+3 (x\geq -1)}$ 。

【分析】令 $t=\sqrt{x}-1$ ，将已知等式中的 x 一律换为 t ，求出 $f(t)$ 即得到 $f(x)$ 。注意定义域。

【解答】解：令 $t=\sqrt{x}-1 (t\geq -1)$ 则 $x=(t+1)^2$

所以 $f(t)=(t+1)^2+2(t+1)=t^2+4t+3 (t\geq -1)$

所以 $f(x)=x^2+4x+3 (x\geq -1)$

故答案为： $x^2+4x+3 (x\geq -1)$

【点评】已知 $f(ax+b)$ 的解析式，求 $f(x)$ 的解析式，一般用换元的方法或配凑的方法，换元时，注意新变量的范围。

15. 当 $0<x<1$ 时，幂函数 $y=x^p$ 的图象在直线 $y=x$ 的上方，则 p 的取值范围是 $\underline{p\leq 1}$ 。

【分析】根据幂函数的性质转化为指数函数进行求解。

【解答】解：当 $0<x<1$ 时，幂函数 $y=x^p$ 的图象都在直线 $y=x$ 的上方，

则此时 $x^p>x$ ，

$\because 0<x<1$ ，

$\therefore p$ 的取值范围是 $p < 1$.

故答案为: $p < 1$.

【点评】 本题主要考查了幂函数的图象和性质应用问题, 也考查了指数函数的性质应用问题.

16. 下列说法正确的是 ③④.

①任意 $x \in \mathbb{R}$, 都有 $3^x > 2^x$;

②若 $a > 0$, 且 $a \neq 1$, $M > 0$, $N > 0$, 则有 $\log_a (M+N) = \log_a M \cdot \log_a N$;

③ $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$ 的最大值为 1;

④在同一坐标系中, $y = 2^x$ 与 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象关于 y 轴对称.

【分析】 ①, 结合 $y = 3^x$ 与 $y = 2^x$ 的图象即可判断,

②, 根据对数的运算性质判定,

③, 由 $|x| \geq 0$, 且函数 $y = 2^t$ 递减, 即可判断;

④, 结合 $y = 2^x$ 与 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$ 的图象即可判断.

【解答】 解: 对于①, $x > 0$ 时, 有 $3^x > 2^x$, $x = 0$ 时, 有 $3^x = 2^x$, $x < 0$ 时, 有 $3^x < 2^x$, 故错,

对于②, 若 $a > 0$, 且 $a \neq 1$, $M > 0$, $N > 0$, 则有 $\log_a (M+N) \neq \log_a M \cdot \log_a N$, 错;

对于③, $\because |x| \geq 0$, 且函数 $y = 2^t$ 在 $t \geq 0$ 时递减, $\therefore y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$ 的最大值为 1, 正确;

对于④, 在同一坐标系中, $y = 2^x$ 与 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$ 的图象关于 y 轴对称, 正确.

故答案为: ③④

【点评】 本题考查了命题真假的判定, 涉及到了函数、对数运算的基础知识, 属于中档题.

三、解答题 (共 70 分)

17. (10 分) 已知集合 $A = \{1, 3, x^2\}$, $B = \{1, 2 - x\}$, 且 $B \subseteq A$.

(1) 求实数 x 的值;

(2) 若 $B \cup C = A$, 求集合 C .

【分析】(1) 由 $B \subseteq A$, 得到 $2 - x = 3$, 或 $2 - x = x^2$, 得 $x = -1$, 或 $x = 1$, 或 $x = -2$, 当 $x = \pm 1$ 时, $A = \{1, 3, 1\}$ 不满足集合中元素的互异性, 由此求出 $x = -2$.

(2) 由 (1) 得 $A = \{1, 3, 4\}$, $B = \{1, 4\}$, 由 $B \cup C = A$, 能求出集合 C .

【解答】解: (1) $\because$ 集合 $A = \{1, 3, x^2\}$, $B = \{1, 2 - x\}$, 且 $B \subseteq A$,

$\therefore 2 - x = 3$, 或 $2 - x = x^2$,

解得 $x = -1$, 或 $x = 1$, 或 $x = -2$, ... (3 分)

当 $x = \pm 1$ 时, $A = \{1, 3, 1\}$ 不满足集合中元素的互异性, 舍去,

$\therefore x = -2$ (6 分)

(2) 由 (1) 得 $A = \{1, 3, 4\}$, $B = \{1, 4\}$,

$\because B \cup C = A$,

$\therefore$ 集合 C 可能为: $\{3\}$ 或 $\{1, 3\}$ 或 $\{3, 4\}$ 或 $\{1, 3, 4\}$ (10 分)

【点评】本题考查实值的求法, 考查集合的求法, 是基础题, 解题时要认真审题, 注意子集、并集定义的合理运用.

18. (12 分) 化简下列各式

$$(1) \left(\frac{5}{6}a^{\frac{1}{3}}b^{-2}\right) \cdot (-3a^{-\frac{1}{2}}b^{-1}) \div (4a^{\frac{2}{3}}b^{-3})^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{ab}$$

$$(2) \frac{\lg\sqrt{27} + \lg 8 - 3\lg\sqrt{10}}{\lg 1.2}.$$

【分析】(1) 根据指数幂的运算性质即可求出,

(2) 根据对数的运算性质计算即可

$$\text{【解答】解: (1) 原式} = \left(-\frac{5}{6} \times 3 \times \frac{1}{2}\right) \cdot a^{\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}} b^{-2-1+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} = -\frac{5}{4b};$$

$$(2) \text{原式} = \frac{3\lg(\sqrt{3} \times 2 \div \sqrt{10})}{\lg 1.2} = \frac{3\lg\sqrt{1.2}}{\lg 1.2} = \frac{3}{2}.$$

【点评】本题考查了指数幂和对数的运算性质, 属于基础题

$$19. (12 \text{ 分}) \text{ 设函数 } f(x) = \begin{cases} 2^{-x}, & x < 1 \\ \log_4 x, & x \geq 1 \end{cases}.$$

(1) 求 $f(0)$, $f(2)$, $f(f(3))$ 的值;

(2) 求不等式 $f(x) \leq 2$ 的解集.

【分析】(1) 代值计算即可，

(2) 根据分段函数的解析式解不等式即可.

【解答】解：(1) $f(0) = 2^{-0} = 1$, $f(2) = \log_4 2 = \frac{1}{2}$, $f(3) = \log_4 3 = \log_2 \sqrt{3}$

$$f(\log_2 \sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore f(f(3)) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

(2) 当 $x < 1$ 时, $f(x) \leq 2 \Leftrightarrow 2^{-x} \leq 2$, $\begin{cases} x < 1 \\ -x \leq 1 \end{cases}$, 解得: $-1 \leq x < 1$;

当 $x \geq 1$ 时, $f(x) \leq 2 \Leftrightarrow \log_4 x \leq 2$, $\begin{cases} x \geq 1 \\ 0 \leq x \leq 16 \end{cases}$, 解得: $1 \leq x \leq 16$;

综上, 不等式的解集为 $[-1, 16]$.

【点评】本题考查了分段函数, 以及不等式的解法, 属于基础题.

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{2^x - a}{2^x + 1}$ 是奇函数 (a 为常数).

(1) 求 a 的值;

(2) 解不等式 $f(x) < \frac{3}{5}$.

【分析】(1) 由题意可得 $f(0) = \frac{1-a}{2} = 0$, 由此求得 a 的值.

(2) 由不等式可得 $2^{x+1} < 8$, 由此解得该不等式的解集.

【解答】解：(1) $\because$ 函数 $f(x) = \frac{2^x - a}{2^x + 1}$ 是奇函数 (a 为常数),

$$\therefore f(0) = \frac{1-a}{2} = 0, \text{ 求得 } a=1.$$

(2) 不等式 $f(x) < \frac{3}{5}$,

$$\text{即 } \frac{2^x - 1}{2^x + 1} < \frac{3}{5},$$

$$\text{即 } 2^{x+1} < 8,$$

解得: $x < 2$,

故该不等式的解集为 $(-\infty, 2)$.

【点评】本题主要考查函数的奇偶性的应用, 解指数型不等式, 属于基础题.

21. (12分) 已知函数 $f(x) = \log_a(3 - ax)$.

(1) 当 $x \in [0, \frac{3}{2}]$ 时, 函数 $f(x)$ 恒有意义, 求实数 a 的取值范围;

(2) 是否存在这样的实数 a , 使得函数 $f(x)$ 在区间 $[2, 3]$ 上为增函数, 并且 $f(x)$ 的最大值为 1. 如果存在, 试求出 a 的值; 如果不存在, 请说明理由.

【分析】 (1) 由题意, 即要考虑到当 $x \in [0, \frac{3}{2}]$ 时, $3 - ax > 0$ 恒成立, 转化成恒成立问题, 利用复合函数的单调性即可求出实数 a 的取值范围;

(2) 假设存在这样的实数, 再根据 $f(x)$ 是增函数, 并且 $f(x)$ 的最大值为 1, 即可求出 a 的值.

【解答】 解: (1) 设 $t = 3 - ax$,

$\because a > 0$, 且 $a \neq 1$, 则 $t = 3 - ax$ 为 $\mathbb{R}$ 上的减函数,

$\therefore x \in [0, \frac{3}{2}]$ 时, t 的最小值为 $3 - \frac{3}{2}a$,

又 $\because$ 当 $x \in [0, \frac{3}{2}]$, $f(x)$ 恒有意义, 即 $t > 0$ 对 $x \in [0, \frac{3}{2}]$ 恒成立,

$\therefore t_{\min} > 0$, 即 $3 - \frac{3}{2}a > 0$,

$\therefore a < 2$, 又 $a > 0$, 且 $a \neq 1$,

$\therefore$ 实数 a 的取值范围为 $(0, 1) \cup (1, 2)$.

(2) 令 $t = 3 - ax$, 则 $y = \log_a t$,

$\because a > 0$, 则函数 $t(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的减函数,

又 $\because f(x)$ 在区间 $[2, 3]$ 上为增函数,

$\therefore y = \log_a t$ 为减函数,

$\therefore 0 < a < 1$,

$\therefore$ 当 $x \in [2, 3]$ 时, $t(x)$ 最小值为 $3 - 3a$, 即此时 $f(x)$ 最大值为 $\log_a(3 - 3a)$,

由题意可知, $f(x)$ 的最大值为 1,

$\therefore \log_a(3 - 3a) = 1$,

$\therefore \begin{cases} 3 - 3a > 0 \\ \log_a(3 - 3a) = 1 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} a < 1 \\ a = \frac{3}{4} \end{cases}$,

$\therefore a = \frac{3}{4}$,

故存在实数 $a = \frac{3}{4}$, 使得函数 $f(x)$ 在区间 $[2, 3]$ 上为增函数, 并且 $f(x)$ 的最大

值为 1.

【点评】本题主要考查了对数函数的定义域、单调性的应用、函数单调性的性质、不等式的解法等基础知识，考查运算求解能力. 对于是否存在问题，一般假设存在，推出结论. 属于基础题.

22. (12 分) 已知 $f(x)$ 是定义在 $[-2, 2]$ 上的奇函数，且 $f(2)=3$ ，若对任意的 $m, n \in [-2, 2]$ ， $m+n \neq 0$ ，都有 $\frac{f(m)+f(n)}{m+n} > 0$.

(1) 若 $f(2a-1) < f(a^2-2a+2)$ ，求实数 a 的取值范围；

(2) 若不等式 $f(x) \leq (5-2a)t+1$ 对任意 $x \in [-2, 2]$ 和 $a \in [-1, 2]$ 都恒成立，求实数 t 的取值范围.

【分析】(1) 由题意首先确定函数的单调性，结合函数的单调性脱去 f 符号，求解关于实数 a 的不等式组即可求得最终结果；

(2) 集合 (1) 中函数的性质得到关于实数 t 的不等式组，求解不等式组即可求得实数 t 的取值范围.

【解答】解：(1) 设任意 x_1, x_2 ，满足 $-2 \leq x_1 < x_2 \leq 2$ ，由题意可得

$$f(x_1) - f(x_2) = f(x_1) + f(-x_2) = \frac{f(x_1)+f(-x_2)}{x_1+(-x_2)} \times (x_1-x_2) < 0,$$

即 $f(x_1) < f(x_2)$,

$\therefore f(x)$ 在定义域 $[-2, 2]$ 上是增函数.

则 $f(2a-1) < f(a^2-2a+2)$ 可化为：

$$-2 \leq 2a-1 < a^2-2a+2 \leq 2,$$

解得 $0 \leq a < 1$,

$\therefore a$ 的取值范围为 $[0, 1)$.

(2) 由 (1) 知，不等式 $f(x) \leq (5-2a)t+1$ 对任意 $x \in [-2, 2]$ 和 $a \in [-1, 2]$ 都恒成立，

$f_{\max}(x) \leq (5-2a)t+1$ 对任意的 $a \in [-1, 2]$ 都恒成立，

$\therefore 3 \leq (5-2a)t+1$ 恒成立，

即 $2ta-5t+2 \leq 0$ 对任意的 $a \in [-1, 2]$ 都恒成立，

令 $g(a) = 2ta-5t+2$ ， $a \in [-1, 2]$ ，

则只需
$$\begin{cases} g(-1) = -5t + 2 \leq 0 \\ g(2) = -t + 2 \leq 0 \end{cases},$$

解得 $t \geq 2$,

$\therefore t$ 的取值范围是 $[2, +\infty)$.

【点评】 本题考查函数的单调性，函数的奇偶性及其应用等，重点考查学生对基础概念的理解和计算能力，属于中等题.