

数学试卷 高二理科

考试时间:120 分钟

试题满分:150 分

一、选择题(4 个选项中只有 1 个选项正确, 每题 5 分, 共 12 题, 满分 60 分)

- 命题“所有被 5 整除的整数都是奇数”的否定是()
(A) 所有被 5 整除的整数都不是奇数 (B) 所有奇数都不能被 5 整除
(C) 存在一个被 5 整除的整数不是奇数 (D) 存在一个奇数, 不能被 5 整除
- 下列各组向量中不平行的是()
(A) $a = (1, 2, -2), b = (-2, -4, 4)$ (B) $c = (1, 0, 0), d = (-3, 0, 0)$
(C) $e = (2, 3, 0), f = (0, 0, 0)$ (D) $g = (-2, 3, 5), h = (16, 24, 40)$
- 如果命题“若 p 则 q ”的逆命题是真命题, 那么下列命题一定为真命题的是()
(A) 若 p 则 q (B) 若 $\neg p$ 则 $\neg q$ (C) 若 $\neg q$ 则 $\neg p$ (D) 以上都不对
- $"b > 0"$ 是“关于 x 的方程 $|x| = ax + b$ 有两个不同实根”的()
(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件 (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- 下列命题正确的是()
(A) 方程 $\frac{x}{y-2} = 1$ 表示斜率为 1, 在 y 轴上的截距为 2 的直线
(B) $\triangle ABC$ 三个顶点坐标分别是 $A(0, 3), B(-2, 0), C(2, 0)$, 则 BC 中线的方程是 $x = 0$
(C) 到 x 轴的距离为 5 的点的轨迹方程为 $y = 5$
(D) 曲线 $2x^2 - 3y^2 - 2x + m = 0$ 过原点的充要条件是 $m = 0$
- 已知命题 p : 椭圆的离心率 e 越大、椭圆越接近圆; q : 双曲线的离心率 e 越大、双曲线的开口越狭窄. 则下列命题是真命题的是()
(A) $p \vee q$ (B) $p \wedge q$ (C) $p \vee (\neg q)$ (D) $p \wedge (\neg q)$
- 一平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 顶点 A 为端点的三条棱长均为 1, 且它们两两夹角均为 60° , 那么对角线 AC_1 的长为()

- (A) $\sqrt{6}$ (B) $\sqrt{5}$ (C) 2 (D) $\sqrt{3}$

8. 若抛物线 $y^2 = 2x$ 的焦点是 F ，准线是 l ，点 $M(2, m)$ 是抛物线上一点且在第一象限，

则经过点 F, M 且与 l 相切的圆的个数为()

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4

9. 空间四边形 $OABC$ 中， $OB = OC$ ， $\angle AOB = \angle AOC = \frac{\pi}{3}$ ，则 $\cos \langle OA, BC \rangle$ 的值是

()

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $-\frac{1}{2}$ (D) 0

10. 已知两点 $M(-5, 0), N(5, 0)$ ，若直线上存在点 P ，使 $|PM| - |PN| = 6$ ，则称该直线为

“和谐直线”，给出下列直线：① $y = x - 1$ ；② $y = 2$ ；③ $y = \frac{5}{3}x$ ；④ $y = 2x + 1$. 其

中为“和谐直线”的是()

- (A) ①② (B) ③④ (C) ①③ (D) ②

11. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F ，过 F 作双曲线 C 的一条渐近

线的垂线，垂足为 N ，若 $|FN| = a$ ，则双曲线 C 的离心率为()

- (A) 1 (B) 2 (C) $\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{3}$

12. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y^2 = 2x$ 的焦点为 F . 设 M 是抛物线上的动点，则

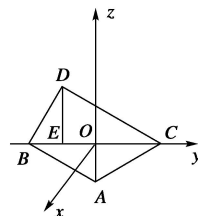
$\frac{|MO|}{|MF|}$ 的最大值为()

- (A) 1 (B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

二、填空题(每题 5 分，共 4 题，满分 20 分)

13. 如下图所示，在空间直角坐标系中 $BC = 2$ ，原点 O 是 BC 的中点，

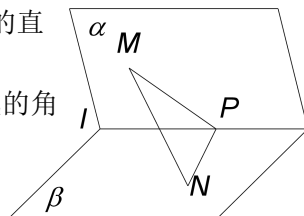
点 A 的坐标是 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ ，点 D 在平面 yOz 上，且



$\angle BDC = 90^\circ$, $\angle DCB = 30^\circ$, 则向量 $\overrightarrow{AD}$ 的坐标为_____.

14. 过点 $M(3,-1)$ 且被点 M 平分的双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的弦所在直线方程为_____.

15. 如图, $\alpha - l - \beta$ 为 60° 的二面角, 等腰直角三角形 MPN 的直角顶点 P 在 l 上, $M \in \alpha, N \in \beta$, 且 MP 和 NP 与 l 所成的角相等, 则 MN 与 β 所成角为_____.



16. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$, 若椭圆上存在一点 P (非顶点) 使 $\frac{\sin \angle PF_1 F_2}{\sin \angle PF_2 F_1} = \frac{\sin \angle PF_1 F_2 + \sin \angle PF_2 F_1}{\sin \angle F_1 P F_2}$, 则该椭圆的离心率的取值范围是_____.

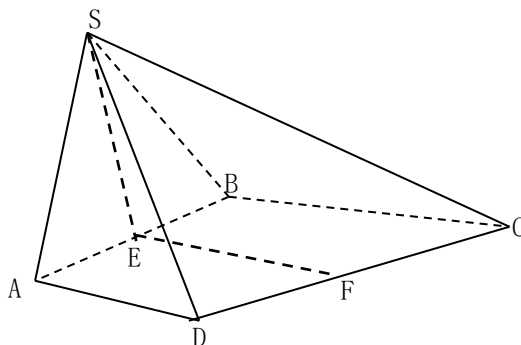
三、解答题 (共 6 题, 17 题满分 10 分, 18-22 题每题 12 分, 满分 70 分)

17. 已知命题 A “ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + (a-1)x + 1 < 0$ ”.

(I) 写出命题 A 的否定; (II) 若命题 A 是假命题, 求出实数 a 的取值范围.

18. 如图, 等边 $\triangle SAB$ 与直角梯形 $ABCD$ 垂直, $AD \perp AB, BC \perp AB, AB = BC = 2, AD = 1$. 若 E, F 分别为 AB, CD 的中点.

(I) 求 $|\overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD}|$ 的值; (II) 求面 SCD 与面 SAB 所成的二面角大小.



19. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ，过坐标原点 O 的直线 l 交椭圆于 A 、 B 两点， C 是

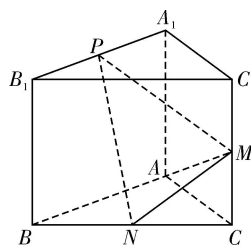
椭圆上的一点，且满足 $OA \cdot OC = OB \cdot OC$ 。

(I) 求证： $\frac{1}{|OA|^2} + \frac{1}{|OC|^2}$ 是定值；(II) 求 ΔABC 面积的最小值。

20. 已知 F_1, F_2 分别是椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右焦点，曲线 C 是以坐标原点为顶点，以 F_2

为焦点的抛物线，自点 F_1 引直线 l 交曲线 C 于 P, Q 两个不同的点，点 P 关于 x 轴的对称点记为 M ，设 $F_1P = \lambda F_1Q$ 。(I) 写出曲线 C 的方程；(II) 证

明： $F_2M = -\lambda F_2Q$ 。



21. 如图，已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱与底面垂直， $AA_1=AB=AC=1$ ， $AB \perp AC$ ， M 、 N 分别是 CC_1 、 BC 的中点，点 P 在 A_1B_1 上，且满足 $A_1P = \lambda A_1B_1 (\lambda \in \mathbf{R})$ 。

(I) 证明： $PN \perp AM$ ；

(II) 当 λ 取何值时，直线 PN 与平面 ABC 所成的角 θ 最大？并求该最大角的正切值；

(III) 若平面 PMN 与平面 ABC 所成的二面角为 45° ，试确定点 P 的位置。

22. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 2，过点 $P(0, m) (m > 0)$ 斜率为

1 的直线 l 交双曲线 C 于 A, B 两点，且 $AP = 3PB$ ， $OA \cdot OB = 3$ 。①求双曲线方程；

②设 Q 为双曲线 C 右支上动点， F 为双曲线 C 的右焦点，在 x 轴负半轴上是否存在定

点 M ，使得 $\angle QFM = 2\angle QMF$ ？若存在，求出点 M 的坐标；若不存在，请说明理由。