2015—2016学年度上学期期末考试高二年级

数学（文）科参考答案及评分标准

一、选择题：

1.B 2. C 3 .A 4. C 5.D 6. C 7.A 8.B 9.D 10.A 11. A 12. B

二、填空题：

13. $x^2-y^2=1$

14. $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

15. 16

16. $S_n=\dfrac{n(n+4)}{3}$

三、解答题（本大题共6道小题，共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17.解：$\because p\vee q$为真，$p\wedge q$为假$\therefore p,q$两个命题一真一假.

由题设知,对于条件p

$\because m\in[-1,1]\therefore m+2\in[1,3]$

$\because$不等式$a^2-5a+5\geq 1$成立,

$\therefore a^2-5a+4\geq 0$，解得$a\leq 1$或$a\geq 4$ ……………………………4分

对于条件q

$\because a^2+ax+2=0$有两个负数解，

$\therefore\begin{cases}\Delta=a^2-8\geq 0\\ x_1+x_2=-a<0\end{cases}$，$\therefore a\geq 2\sqrt{2}$ ……………………………………8分

若p真q假，则$a\leq 1$；若p假q真，则$2\sqrt{2}\leq a<4$

$\therefore a$的取值范围是: $a\leq 1$或$2\sqrt{2}\leq a<4$ ……………………………10分

（18）解：（1）定义域为$(0,+\infty)$. $\because f'(x)=2x+a-\dfrac{a^2}{x}=\dfrac{(x+a)(2x-a)}{x}$

①当$a>0$时，令$f'(x)>0$，解得$x>\dfrac{a}{2}$；令$f'(x)<0$，解得$0<x<\dfrac{a}{2}$.

②当$a=0$时，$f'(x)=2x>0$恒成立，所以$f(x)$只有增区间$(0,+\infty)$.

③ 当 $a<0$ 时 ， 令 $f'(x)>0$ ， 解 得 $x>-a$ ； 令 $f'(x)<0$ ， 解 得

$0 < x < -a$. ························6 分

综上：当 $a > 0$ 时，$f(x)$ 的增区间为 $(\frac{a}{2},+\infty)$；减区间为 $(0,\frac{a}{2})$；

当 $a = 0$ 时，$f(x)$ 只有增区间 $(0,+\infty)$；

当 $a < 0$ 时，$f(x)$ 的增区间为 $(-a,+\infty)$；

减区间为 $(0,-a)$ ··7 分

(2) $\because f'(x) = \frac{(x+a)(2x-a)}{x}$，$\therefore f'(x) = 0$ 时，解得 $x = \frac{a}{2}$.

$\because a > 1$，$\therefore \frac{a}{2} < a$. 由（1）可知

① 当 $0 < \frac{a}{2} \le 1$，即 $0 < a \le 2$ 时，$f(x)$ 在区间 $[1,a]$ 上单调递增，

$\therefore f(x)_{\min} = f(1) = a+1$；

②当 $\frac{a}{2} > 1$，即 $a > 2$ 时，$f(x)$ 在区间 $[1,\frac{a}{2})$ 上单调递减，在区间 $(\frac{a}{2},a]$ 上单调递增.

$\therefore f(x)_{\min} = f(\frac{a}{2}) = a^2(\frac{3}{4} - \ln\frac{a}{2})$. ··································11 分

综上：$\therefore f(x)_{\min} = \begin{cases} a+1, 0 < a \le 2 \\ a^2(\frac{3}{4} - \ln\frac{a}{2}), a > 2 \end{cases}$. ································12 分

19 解：（Ⅰ）$\because S_n = \frac{3}{2}a_n - \frac{1}{2} \quad (n \in N^*)$ ①

$\because$ 当 $n = 1, S_1 = \frac{3}{2}a_1 - \frac{1}{2}$，$\therefore a_1 = 1$

当 $n \ge 2, \because S_{n-1} = \frac{3}{2}a_{n-1} - \frac{1}{2}$ ②

①-②：$\therefore a_n = \frac{3}{2}a_n - \frac{3}{2}a_{n-1}$，即：$a_n = 3a_{n-1}$ $(n \ge 2)$ ··························4 分

又 $\because a_1 = 1 \therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} = 3$ 对 $n \in N^*$ 都成立，所以 $\{a_n\}$ 是等比数列，

$\therefore a_n = 3^{n-1}$ （$n \in N^*$） ··6 分

（Ⅱ）$\because a_nb_n=\dfrac{3^n}{n^2+n}$ $\quad\therefore b_n=\dfrac{3}{n^2+n}$ $\therefore T_n=3(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})$

$\therefore T_n=3(1-\dfrac{1}{n+1})=3-\dfrac{3}{n+1}$ ……………………………………………………8 分

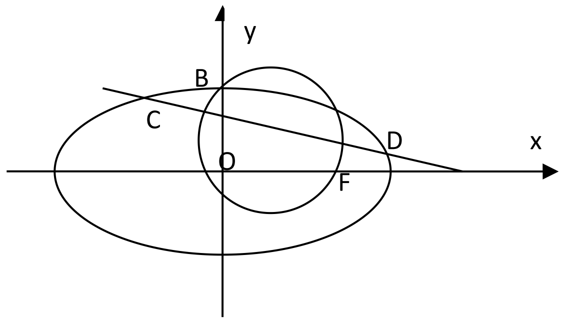
$\because \dfrac{3}{n+1}>0$，$\therefore T_n<3$ 对 $n\in N^*$ 都成立……………………………………………10 分

$\therefore 3\le c^2-2c\ \therefore c\ge 3或c\le -1$

$\therefore$ 实数 c 的取值范围为 $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$． ………………………………………12 分

20．解：（Ⅰ）$\because$ 圆 G：$x^2+y^2-x-\sqrt{3}y=0$ 经过点 F,B．

$\therefore F(1,0),B(0,\sqrt{3})$，



$\therefore c=1$，$b=\sqrt{3}$． $\therefore a^2=4$．

故椭圆的方程为

$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$． …………4 分

（Ⅱ）设直线 l 的方程为 $y=-(x-m)(m>2)$．

由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\\ y=-(x-m)\end{cases}$ 消去 y 得 $7x^2-8mx+(4m^2-12)=0$．

设 $C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{8m}{7}$，$x_1x_2=\dfrac{4m^2-12}{7}$，………6 分

$\therefore y_1y_2=[-(x_1-m)]\cdot[-(x_2-m)]=x_1x_2-m(x_1+x_2)+m^2$．

$\because \overrightarrow{FC}=(x_1-1,y_1)$，$\overrightarrow{FD}=(x_2-1,y_2)$ ……………………………8 分

$\therefore \overrightarrow{FC}\cdot\overrightarrow{FD}=(x_1-1)(x_2-1)+y_1y_2$

$=x_1x_2-(x_1+x_2)+1+y_1y_2$

$=2x_1x_2-(m+1)(x_1+x_2)+1+m^2=\dfrac{7m^2-8m-17}{7}$ ……………………10 分

$\because$ 点 F 在圆 G 的内部，$\therefore \overrightarrow{FC}\cdot\overrightarrow{FD}<0$， 即 $\dfrac{7m^2-8m-17}{7}<0$，

解得 $\dfrac{4-3\sqrt{15}}{7}<m<\dfrac{4+3\sqrt{15}}{7}$

由△$=64m^2-28(4m^2-12)>0$，解得 $-\sqrt{7}<m<\sqrt{7}$.

又 $m>2$，$\therefore 2<m<\dfrac{4+3\sqrt{15}}{7}$. ………………………………12 分

21. 解：(Ⅰ)由 $f(x)=\dfrac{a\ln x+b}{e^x}$ 得 $f'(x)=\dfrac{a-bx-ax\ln x}{xe^x}$ ($x>0$).

由已知得 $f'(1)=\dfrac{a-b}{e}=0$，解得 $a=b$.

又 $f(1)=\dfrac{b}{e}=\dfrac{1}{e}$，即，$b=1$

$\therefore a=b=1$ ……………………………………………………4 分

(Ⅱ) 证明：令 $p(x)=1-x-x\ln x$，$x\in(0,+\infty)$，

$\therefore$ $p'(x)=-\ln x-2=-(\ln x-\ln e^{-2})$，$x\in(0,+\infty)$.

易得当 $x\in(0,e^{-2})$ 时，$p'(x)>0$，即 $p(x)$ 单调递增；

当 $x\in(e^{-2},+\infty)$ 时，$p'(x)<0$，即 $p(x)$ 单调递减.

所以 $p(x)$ 的最大值为 $p(e^{-2})=1+e^{-2}$，

故 $1-x-x\ln x\leqslant 1+e^{-2}$. ①……………………8 分

设 $q(x)=e^x-(1+x)$，则 $q'(x)=e^x-1>0(x>0)$，

因此，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$q(x)$ 单调递增，$q(x)>q(0)=0$.

故当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$q(x)=e^x-(1+x)>0$，即 $\dfrac{e^x}{x+1}>1$. ②……………10 分

由①②得 $1-x-x\ln x\leqslant 1+e^{-2}<\dfrac{e^x}{x+1}(1+e^{-2})$. ……………………………12 分

22. 解：（Ⅰ）依题意可得 $A(-1,0)$，$B(1,0)$.

设椭圆 M 的方程为 $x^2+\frac{y^2}{b^2}=1\left(b>1\right)$，

因为椭圆 M 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\frac{\sqrt{b^2-1}}{b}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 $b^2=2$．

所以椭圆 M 的方程为 $x^2+\frac{y^2}{2}=1$． ……………………………………2 分

设点 $P(x_1,y_1)$、$T(x_2,y_2)$（$x_i>0$，$y_i>0$，$i=1,2$），直线 AP 的斜率为 k（$k>0$），则直线 AP 的方程为 $y=k(x+1)$，联立方程组

$\begin{cases} y=k\left(x+1\right), \\ x^2+\dfrac{y^2}{2}=1. \end{cases}$ 整理，得 $\left(2+k^2\right)x^2+2k^2x+k^2-2=0$，………………4 分

解得 $x=-1$ 或 $x=\frac{2-k^2}{2+k^2}$． 所以 $x_2=\frac{2-k^2}{2+k^2}$．

同理可得，$x_1=\frac{2+k^2}{2-k^2}$…所以 $x_2=\frac{1}{x_1}$． ……………………………………6 分

（Ⅱ）**解：** 设点 $P(x_1,y_1)$、$T(x_2,y_2)$（$x_i>0$，$y_i>0$，$i=1,2$），

则 $\overrightarrow{PA}=\left(-1-x_1,-y_1\right)$，$\overrightarrow{PB}=\left(1-x_1,-y_1\right)$．

因为 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\le 9$，所以 $\left(-1-x_1\right)\left(1-x_1\right)+{y_1}^2\le 9$，即 ${x_1}^2+{y_1}^2\le 10$．

因为点 P 在双曲线上，则 ${x_1}^2-\frac{{y_1}^2}{2}=1$，

所以 ${x_1}^2+2{x_1}^2-2\le 10$，即 ${x_1}^2\le 4$．

因为点 P 是双曲线在第一象限内的一点

所以 $1<x_1\le 2$． ……………………………………………………………8 分

因为 $S_1=\frac{1}{2}|AB||y_2|=|y_2|$，$S_2=\frac{1}{2}|OB||y_1|=\frac{1}{2}|y_1|$，

所以 ${S_1}^2\cdot{S_2}^2={y_2}^2\cdot\frac{1}{4}{y_1}^2=\frac{\left(2-2{x_2}^2\right)({x_1}^2-1)}{2}=\left(1-{x_2}^2\right)({x_1}^2-1)$．

由（Ⅰ）知，$x_2=\frac{1}{x_1}$． 设 $t={x_1}^2$，则 $1<t\le 4$，${S_1}^2\cdot{S_2}^2=t+\frac{1}{t}-2$．

因为 $f(t)=t+\frac{1}{t}$ 在区间 $\left(1,4\right]$ 上单调递增，$f(t)_{\max}=f(4)$．

所以 ${S_1}^2\cdot{S_2}^2=t+\frac{1}{t}-2\le\frac{9}{4}$

即当 $x_1=2$ 时，$\left(S_1\cdot S_2\right)_{\max}=\frac{3}{2}$ ……………………………………12 分