

数列存在性问题的分析与解答教案

1. 问题呈现

题目：已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $S_n = \frac{a_n(a_n+2)}{4} \quad (n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 求 a_1 的值及数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 是否存在非零整数 λ ，使不等式 $\lambda(1-\frac{1}{a_1})(1-\frac{1}{a_2})\cdots(1-\frac{1}{a_n})\cos\frac{\pi a_{n+1}}{2} < \frac{1}{\sqrt{a_n+1}}$ 对

一切 $n \in \mathbf{N}^*$ 都成立？若存在，求出 λ 的值；若不存在，说明理由.

2. 分析与解答

分析：第(1)问根据数列通项 $a_n = S_n - S_{n-1} \quad (n \geq 2)$ 很容易求出；关键是第(2)问中根据

第(1)问的结论 $a_n = 2n$ ，可得 $\cos\frac{\pi a_{n+1}}{2} = \cos(n+1)\pi = (-1)^{n+1}$ ，则可考虑分离参数 λ ，

令 $b_n = \frac{1}{(1-\frac{1}{a_1})(1-\frac{1}{a_2})\cdots(1-\frac{1}{a_n})\sqrt{a_n+1}}$ 则需要分析 b_n 的单调性以确定 b_n 的最值. 最后，

需要考虑 n 为奇数和偶数进行分类讨论.

解 (1) 由 $S_n = \frac{a_n(a_n+2)}{4}$.

当 $n=1$ 时， $a_1 = S_1 = \frac{a_1(a_1+2)}{4}$ ，解得 $a_1 = 2$ 或 $a_1 = 0$ （舍去）.

当 $n \geq 2$ 时，

$$\text{由 } a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{a_n(a_n+2)}{4} - \frac{a_{n-1}(a_{n-1}+2)}{4} \Rightarrow a_n^2 - a_{n-1}^2 = 2(a_n + a_{n-1}),$$

$\because a_n > 0, \therefore a_n + a_{n-1} \neq 0$ ，则 $a_n - a_{n-1} = 2$ ，

$\therefore \{a_n\}$ 是首项为2，公差为2的等差数列，故 $a_n = 2n$.

(2) 由 $a_n = 2n$ ，得 $\cos\frac{\pi a_{n+1}}{2} = \cos(n+1)\pi = (-1)^{n+1}$ ，

设 $b_n = \frac{1}{(1-\frac{1}{a_1})(1-\frac{1}{a_2})\cdots(1-\frac{1}{a_n})\sqrt{a_n+1}}$ ，则不等式等价于 $(-1)^{n+1}\lambda < b_n$.

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\sqrt{a_n+1}}{\left(1-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\sqrt{a_{n+1}+1}} = \frac{\sqrt{2n+1}}{\left(1-\frac{1}{2n+2}\right)\sqrt{2n+3}} = \frac{2n+2}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}$$

$$= \frac{\sqrt{4n^2+8n+4}}{\sqrt{4n^2+8n+3}} > 1,$$

$\because b_n > 0, \therefore b_{n+1} > b_n$, 数列 $\{b_n\}$ 单调递增.

假设存在这样的实数 λ , 使得不等式 $(-1)^{n+1} \lambda < b_n$ 对一切 $n \in \mathbf{N}^*$ 都成立, 则

① 当 n 为奇数时, 得 $\lambda < (b_n)_{\min} = b_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$;

② 当 n 为偶数时, 得 $-\lambda < (b_n)_{\min} = b_2 = \frac{8\sqrt{5}}{15}$, 即 $\lambda > -\frac{8\sqrt{5}}{15}$.

综上, $\lambda \in (-\frac{8\sqrt{5}}{15}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$, 由 λ 是非零整数, 知存在 $\lambda = \pm 1$ 满足条件.

3. 题后反思

针对这类数列的存在性问题, 往往需要进行分类参数并构造数列, 判断数列的单调性可用比商法或作差法, 题目中出现三角函数往往要考虑其周期性, 涉及 $(-1)^n$ 往往需要对 n 为奇数和偶数进行分类讨论.