

2018 届高三模拟考试

理科数学

第 I 卷（选择题 共 60 分）

一、选择题：本大题共 12 个小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - x - 2 \geq 0\}$ ，则 $C_R A =$ ()

- A. $(-1, 2)$ B. $[-1, 2]$ C. $(-2, 1)$ D. $[-2, 1]$

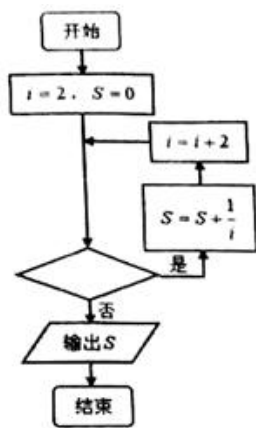
2. 已知复数 $z = \frac{i}{1+i}$ (i 是虚数单位)，则 $|z| =$ ()

- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\sqrt{2}$

3. 已知 $a = 3^{-\frac{1}{2}}$ ， $b = \log_3 \frac{1}{2}$ ， $c = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$ ，则 a, b, c 的大小关系是 ()

- A. $a > c > b$ B. $c > a > b$ C. $a > b > c$ D. $c > b > a$

4. 下图给出的是计算 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2018}$ 值的程序框图，其中判断框内可填入的条件是 ()

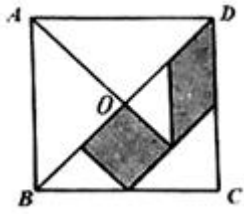


- A. $i > 2016?$ B. $i > 2018?$ C. $i \leq 2016?$ D. $i \leq 2018?$

5. 若 $(x^2 - a)(x + \frac{1}{x})^{10}$ 的展开式中 x^6 的系数为 30，则 $a =$ ()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. 2

6. 七巧板是我们祖先的一项创造，被誉为“东方魔板”，它是由五块等腰直角三角形（两块全等的小三角形、一块中三角形和两块全等的大三角形）、一块正方形和一块平行四边形组成的. 如图是一个用七巧板拼成的正方形，在此正方形中任取一点，则此点取自阴影部分的概率是 ()

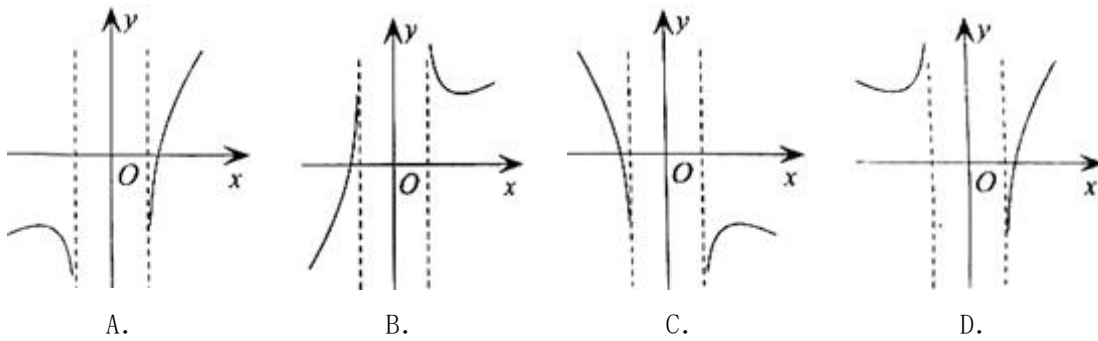


- A. $\frac{3}{16}$ B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{8}$

7. 已知 $\tan(\alpha - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{4}$, 则 $\sin 2\alpha =$ ()

- A. $-\frac{7}{9}$ B. $\frac{7}{9}$ C. $-\frac{1}{9}$ D. $\frac{1}{9}$

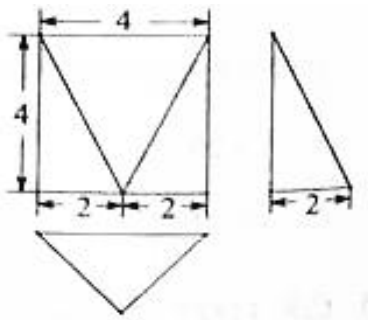
8. 函数 $f(x) = \ln(|x| - 1) + x$ 的大致图象为 ()



9. 已知 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \geq 0 \\ x^2 - 2x, & x < 0 \end{cases}$, 则满足 $f(2x+1) > f(2)$ 成立的 x 取值范围是 ()

- A. $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ B. $(-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$
C. $(-\infty, \frac{1}{2})$ D. $(\frac{1}{2}, +\infty)$

10. 某多面体的三视图如图所示, 其中俯视图是等腰三角形. 该多面体的各个面中有若干个是等腰三角形, 这些等腰三角形的面积之和为 ()



- A. $4 + 4\sqrt{3}$ B. $4 + 4\sqrt{5}$ C. $8\sqrt{2}$ D. $4 + 4\sqrt{5} + 8\sqrt{2}$

11. 设 F_1 、 F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的两个焦点, 若 C 上存在点 M 满足 $\angle F_1MF_2 = 120^\circ$, 则 m 的取值范围是 ()

A. $(0, \frac{1}{2}] \cup [8, +\infty)$

B. $(0, 1] \cup [8, +\infty)$

C. $(0, \frac{1}{2}] \cup [4, +\infty)$

D. $(0, 1] \cup [4, +\infty)$

12. 已知函数 $f(x) = (1+2x)(x^2+ax+b)$ ($a, b \in R$) 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称, 则 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的值域为 ()

A. $[-8, \frac{\sqrt{3}}{2}]$

B. $[-7, \frac{\sqrt{3}}{2}]$

C. $[-8, \frac{3\sqrt{3}}{2}]$

D. $[-7, \frac{3\sqrt{3}}{2}]$

第 II 卷 (共 90 分)

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知实数 x, y 满足 $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x+y-1 \leq 0 \end{cases}$, 则 $(x+1)^2 + y^2$ 的最大值为_____.

14. 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AB = 4$, $\overrightarrow{CP} = 3\overrightarrow{PD}$, 若 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BP} = -1$, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} =$ _____.

15. 已知圆 M 与直线 $x-y=0$ 及 $x-y+4=0$ 都相切, 圆心在直线 $y=-x+2$ 上, 则圆 M 的标准方程为_____.

16. 已知 $f(x) = \sin \omega x - \cos \omega x$ ($\omega > \frac{2}{3}$), 若函数 $f(x)$ 图象的任何一条对称轴与 x 轴交点的横坐标都不属于区间 $(2\pi, 3\pi)$, 则 ω 的取值范围是_____. (结果用区间表示)

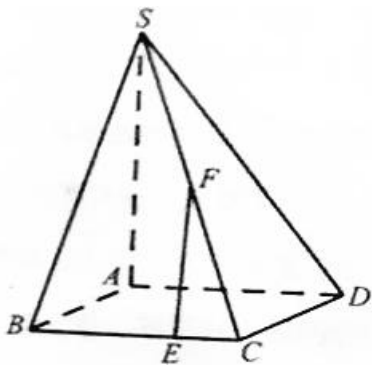
三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分.

17. S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $a_n > 0$, $a_n^2 + 3a_n = 6S_n + 4$.

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 设 $b_n = \frac{3}{a_n a_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

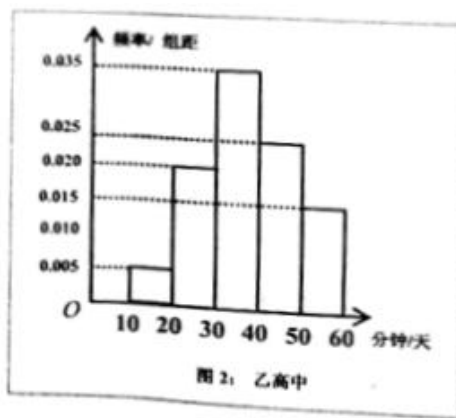
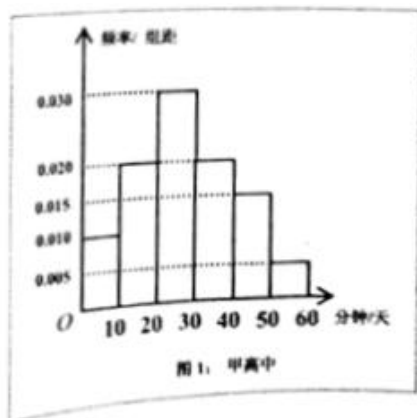
18. 在四棱锥 $S-ABCD$ 中, 平面 $SAB \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $SAD \perp$ 平面 $ABCD$.



(I) 证明: $SA \perp$ 平面 $ABCD$;

(II) 若底面 $ABCD$ 为矩形, $SA = 2AD = 3AB$, F 为 SC 的中点, $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$, 求直线 EF 与平面 SCD 所成角的正弦值.

19. 随着高校自主招生活动的持续开展, 我市高中生掀起了参与数学兴趣小组的热潮. 为调查我市高中生对数学学习的喜好程度, 从甲、乙两所高中各随机抽取了 40 名学生, 记录他们在一周内平均每天学习数学的时间, 并将其分成了 6 个区间: $(0,10]$ 、 $(10,20]$ 、 $(20,30]$ 、 $(30,40]$ 、 $(40,50]$ 、 $(50,60]$, 整理得到如下频率分布直方图:



根据一周内平均每天学习数学的时间 t , 将学生对于数学的喜好程度分为三个等级:

学习时间 (分钟/天)	$t \leq 20$	$20 < t \leq 50$	$t > 50$
喜好等级	一般	爱好	痴迷

(I) 试估计甲高中学生一周内平均每天学习数学的时间的中位数 $m_{\text{甲}}$ (精确到 0.01);

(II) 判断从甲、乙两所高中各自随机抽取的 40 名学生一周内平均每天学习数学的时间的平均值 $\overline{X}_{\text{甲}}$ 与 $\overline{X}_{\text{乙}}$ 及方差 $S_{\text{甲}}^2$ 与 $S_{\text{乙}}^2$ 的大小关系 (只需写出结论), 并计算其中的 $\overline{X}_{\text{甲}}$ 、 $S_{\text{甲}}^2$ (同一组中的数据用该组区间的中点值作代表);

(III) 记事件 A : “甲高中学生对数学的喜好等级高于乙高中学生对数学的喜好等级”. 根据所给数据, 以

事件发生的频率作为相应事件发生的概率，求 A 的概率.

20. 已知抛物线 $C: y = \frac{1}{2}x^2$ ，不过坐标原点 O 的直线 l 交于 A, B 两点.

(I) 若 $OA \perp OB$ ，证明：直线 l 过定点；

(II) 设过 A 且与 C 相切的直线为 l_1 ，过 B 且与 C 相切的直线为 l_2 . 当 l_1 与 l_2 交于点 $(1, -2)$ 时，求 l 的方程.

21. 已知 $f(x) = x^2 - 1 - a \ln x (a \in R)$.

(I) 若曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴有唯一公共点 A ，求 a 的取值范围；

(II) 若不等式 $f(x) \leq e^{x-1} + x^2 - x - 1$ 对任意的 $x \geq 1$ 恒成立，求 a 的取值范围.

请考生在 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题记分. 作答时请写清题号.

22. 选修 4-4：坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 3 \cos \theta \\ y = 2 \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数)，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 2t - a - 1 \end{cases}$

(t 为参数).

(I) 若 $a = 1$ ，求直线 l 被曲线 C 截得的线段的长度；

(II) 若 $a = 11$ ，在曲线 C 上求一点 M ，使得点 M 到直线 l 的距离最小，并求出最小距离.

23. 选修 4-5：不等式选讲

已知函数 $f(x) = |3x - a|$.

(I) 当 $a = 4$ 时，求不等式 $f(x) < 3$ 的解集；

(II) 设函数 $g(x) = |x + 1|$. 当 $x \in R$ 时， $f(x) + g(x) > 1$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

2018 届高三模拟考试
数学（理科）参考答案

一、选择题

1-5: ACBDD 6-10: CBABB 11、12: AD

二、填空题

13. 4 14. 11 15. $x^2 + (y-2)^2 = 2$ 16. $[\frac{7}{8}, \frac{11}{12}]$

三、解答题

17. (I) 当 $n=1$ 时, 有 $a_1^2 + 3a_1 = 6a_1 + 4$, 即 $(a_1 - 4)(a_1 + 1) = 0$.

因为 $a_1 > 0$, 所以 $a_1 + 1 > 0$. 从而 $a_1 - 4 = 0$, 即 $a_1 = 4$.

由 $a_n^2 + 3a_n = 6S_n + 4$, 知 $a_{n+1}^2 + 3a_{n+1} = 6S_{n+1} + 4$.

两式相减, 得 $a_{n+1}^2 + 3a_{n+1} - a_n^2 - 3a_n = 6S_{n+1} + 4 - 6S_n - 4$.

即 $a_{n+1}^2 + 3a_{n+1} - a_n^2 - 3a_n = 6a_{n+1}$, 即 $a_{n+1}^2 - a_n^2 - 3a_{n+1} - 3a_n = 0$,

即 $(a_{n+1} + a_n)(a_{n+1} - a_n - 3) = 0$.

因为 $a_n > 0$, 所以 $a_{n+1} - a_n - 3 = 0$, 即 $a_{n+1} - a_n = 3$.

所以, 数列 $\{a_n\}$ 是首项为 4, 公差为 3 的等差数列.

所以 $a_n = 4 + 3(n-1) = 3n + 1$.

(II) 由 (I) 知 $b_n = \frac{3}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+4}$.

数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为

$$\begin{aligned} T_n &= (\frac{1}{4} - \frac{1}{7}) + (\frac{1}{7} - \frac{1}{10}) + \cdots + (\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}) + (\frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+4}) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{3n+4}. \end{aligned}$$

18. (I) 证法 1: 在平面 $ABCD$ 内过点 C 作两条直线 l_1, l_2 ,

使得 $l_1 \perp AB, l_2 \perp AD$.

因为 $AB \cap AD = A$, 所以 l_1, l_2 为两条相交直线.

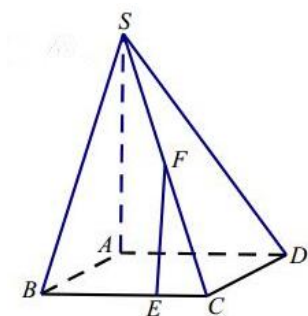
因为平面 $SAB \perp$ 平面 $ABCD$ ，平面 $SAB \cap$ 平面 $ABCD = AB$ ， $l_1 \subset$ 平面 $ABCD$ ， $l_1 \perp AB$ ，所以 $l_1 \perp$ 平面 SAB 。

所以 $l_1 \perp SA$ 。

同理可证 $l_2 \perp SA$ 。

又因为 $l_1 \subset$ 平面 $ABCD$ ， $l_2 \subset$ 平面 $ABCD$ ， $l_1 \cap l_2 = C$ ，

所以 $SA \perp$ 平面 $ABCD$ 。



证法 2：在平面 SAB 内过点 S 作 $l_1 \perp AB$ ，在平面 SAD 内过点 S 作 $l_2 \perp AD$ 。

因为平面 $SAB \perp$ 平面 $ABCD$ ，平面 $SAB \cap$ 平面 $ABCD = AB$ ， $l_1 \subset$ 平面 SAB ， $l_1 \perp AB$ ，所以 $l_1 \perp$ 平面 $ABCD$ 。

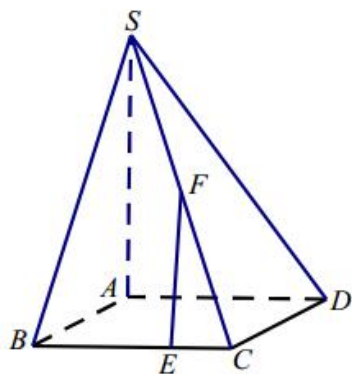
同理可证 $l_2 \perp$ 平面 $ABCD$ 。

而过点 S 作平面 $ABCD$ 的垂线有且仅有一条，

所以 l_1 与 l_2 重合。所以 $l_1 \subset$ 平面 SAD 。

所以，直线 l_1 为平面 SAB 与平面 SAD 的交线。

所以，直线 l_1 与直线 SA 重合。所以 $SA \perp$ 平面 $ABCD$ 。



(II) 如图，分别以 $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{AD}$ 、 $\overrightarrow{AS}$ 所在方向为 x 轴、 y 轴、 z 轴的正方向，建立空间直角坐标系 $A-xyz$ 。

设 $SA=6$ ，则 $AB=2$ ， $AD=3$ ， $B(2,0,0)$ ， $C(2,3,0)$ ， $D(0,3,0)$ ， $S(0,0,6)$ 。

由 F 为 SC 的中点，得 $F(1, \frac{3}{2}, 3)$ ；

由 $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ ，得 $E(2, 2, 0)$ 。

所以 $\overrightarrow{EF} = (-1, -\frac{1}{2}, 3)$ ， $\overrightarrow{SC} = (2, 3, -6)$ ， $\overrightarrow{DC} = (2, 0, 0)$ 。

设平面 SCD 的一个法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$ ，

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{SC} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} 2x + 3y - 6z = 0 \\ 2x = 0 \end{cases}.$$

取 $z=1$ ，则 $y=2$ ， $x=0$ 。

所以 $\vec{n} = (0, 2, 1)$ 。

$$\text{所以} \cos \langle \overrightarrow{EF}, \vec{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{EF} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{EF}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{(-1) \times 0 + (-\frac{1}{2}) \times 2 + 3 \times 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} + 9} \times \sqrt{0 + 4 + 1}} = \frac{4\sqrt{205}}{205}.$$

所以，直线 EF 与平面 SCD 所成角的正弦值为 $\frac{4\sqrt{205}}{205}$ 。

$$19. \text{解: (I)} \quad m_{\text{甲}} = 20 + \frac{0.5 - (0.1 + 0.2)}{0.3} \times 10 \approx 26.67;$$

$$\text{(II)} \quad \overline{X_{\text{甲}}} < \overline{X_{\text{乙}}}; \quad S_{\text{甲}}^2 > S_{\text{乙}}^2;$$

$$\overline{X_{\text{甲}}} = 5 \times 0.1 + 15 \times 0.2 + 25 \times 0.3 + 35 \times 0.2 + 45 \times 0.15 + 55 \times 0.05 = 27.5;$$

$$S_{\text{甲}}^2 = (5 - 27.5)^2 \times 0.1 + (15 - 27.5)^2 \times 0.2 + (25 - 27.5)^2 \times 0.3 + (35 - 27.5)^2 \times 0.2$$

$$+ (45 - 27.5)^2 \times 0.15 + (55 - 27.5)^2 \times 0.05$$

$$= 178.75.$$

(III) 由题意，甲高中学生对数学的喜好程度为“一般”、“爱好”、“痴迷”的概率分别为 0.05、0.8、0.15。

$$P(A) = 0.65 \times 0.05 + 0.05 \times (0.05 + 0.8) = 0.075.$$

20. 设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ 。

(I) 解：显然直线 l 的斜率存在，设为 k ，直线的方程为 $y = kx + m$ 。由题意， $m \neq 0$ 。

$$\text{由} \begin{cases} y = kx + m \\ y = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}, \text{得 } x^2 - 2kx - 2m = 0.$$

由题意, 该方程的判别式 $\Delta = 4(k^2 + 2m) > 0$, 即 $k^2 + 2m > 0$ (★).

则 $x_1 + x_2 = 2k$, $x_1x_2 = -2m$.

因为 $OA \perp OB$, 所以 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$, 所以 $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$,

即 $x_1x_2 + (kx_1 + m)(kx_2 + m) = 0$, 即 $(1 + k^2)x_1x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2 = 0$.

所以 $-2m(1 + k^2) + 2k^2m + m^2 = 0$.

所以 $m^2 - 2m = 0$. 解得 $m = 0$ (舍去), 或 $m = 2$.

当 $m = 2$ 时, $k^2 + 2m > 0$, 满足(★)式.

所以直线 l 的方程为 $y = kx + 2$.

直线 l 过定点 $(0, 2)$.

(II) 解法一: 过点 $(1, -2)$ 且与 $C: y = \frac{1}{2}x^2$ 相切的直线的斜率必存在, 设其斜率为 k , 则其方程为

$y - (-2) = k(x - 1)$, 即 $y = k(x - 1) - 2$.

$$\text{由} \begin{cases} y = k(x - 1) - 2 \\ x^2 = 2y \end{cases} \text{消去 } y \text{ 并整理得 } x^2 - 2kx + 2(k + 2) = 0.$$

由判别式 $\Delta = (-2k)^2 - 8(k + 2) = 0$, 解得 $k = 1 \pm \sqrt{5}$.

不妨设 l_1 的斜率 $k_1 = 1 + \sqrt{5}$, 则 l_2 的斜率 $k_2 = 1 - \sqrt{5}$.

由韦达定理, 得 $x_1 + x_2 = 2k_1$, 即 $x_1 = k_1 = 1 + \sqrt{5}$.

$y_1 = k_1(x_1 - 1) - 2 = (1 + \sqrt{5}) \times \sqrt{5} - 2 = 3 + \sqrt{5}$. 所以 $A(1 + \sqrt{5}, 3 + \sqrt{5})$.

同理可得 $B(1 - \sqrt{5}, 3 - \sqrt{5})$.

直线 l 的方程为 $y - (3 + \sqrt{5}) = \frac{(3 + \sqrt{5}) - (3 - \sqrt{5})}{(1 + \sqrt{5}) - (1 - \sqrt{5})} [x - (1 + \sqrt{5})]$,

即直线 l 的方程为 $y = x + 2$.

解法二: $y' = (\frac{1}{2}x^2)' = x$, 所以过 A 且与 C 相切的直线 l_1 的斜率为 x_1 .

同理, l_2 的斜率为 x_2 .

$$l_1: y - \frac{1}{2}x_1^2 = x_1(x - x_1), \text{ 即 } l_1: y = x_1x - \frac{1}{2}x_1^2. \text{ 同理 } l_2: y = x_2x - \frac{1}{2}x_2^2.$$

$$\text{因为 } l_1 \text{ 与 } l_2 \text{ 的交点 } (1, -2) \text{ 的坐标为方程组 } \begin{cases} y = x_1x - \frac{1}{2}x_1^2 \\ y = x_2x - \frac{1}{2}x_2^2 \end{cases} \text{ 的解,}$$

$$\text{所以 } x_1 - \frac{1}{2}x_1^2 = -2, \text{ 且 } x_2 - \frac{1}{2}x_2^2 = -2.$$

$$\text{所以方程 } x - \frac{1}{2}x^2 = -2, \text{ 即 } -\frac{1}{2}x^2 + x + 2 = 0 \text{ 的两个实根是 } x_1, x_2.$$

$$\text{由 } -\frac{1}{2}x^2 + x + 2 = 0, \text{ 解得 } x_1 = 1 + \sqrt{5}, x_2 = 1 - \sqrt{5}.$$

$$\text{又点 } A, B \text{ 在 } C: y = \frac{1}{2}x^2 \text{ 上, 可得 } A(1 + \sqrt{5}, 3 + \sqrt{5}), B(1 - \sqrt{5}, 3 - \sqrt{5}).$$

$$\text{直线 } l \text{ 的方程为 } y - (3 + \sqrt{5}) = \frac{(3 + \sqrt{5}) - (3 - \sqrt{5})}{(1 + \sqrt{5}) - (1 - \sqrt{5})} [x - (1 + \sqrt{5})],$$

$$\text{即直线 } l \text{ 的方程为 } y = x + 2.$$

解法三: $y' = (\frac{1}{2}x^2)' = x$, 所以过 A 且与 C 相切的直线 l_1 的斜率为 x_1 . 同理, l_2 的斜率为 x_2 .

$$\text{所以, 切线 } l_1: y - y_1 = x_1(x - x_1), \text{ 即 } y - y_1 = x_1x - x_1^2.$$

$$\text{又 } (x_1, y_1) \text{ 是抛物线 } y = \frac{1}{2}x^2 \text{ 上的点, 所以 } y_1 = \frac{1}{2}x_1^2, \text{ 即 } x_1^2 = 2y_1.$$

$$\text{故切线 } l_1 \text{ 的方程为 } y = x_1x - y_1.$$

$$\text{同理切线 } l_2 \text{ 的方程为 } y = x_2x - y_2.$$

$$\text{又切线 } l_1 \text{ 与切线 } l_2 \text{ 均过点 } (1, -2), \text{ 故 } x_1 - y_1 = -2, x_2 - y_2 = -2.$$

$$\text{所以切点 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) \text{ 的坐标适合方程 } x - y = -2.$$

$$\text{所以 } l \text{ 的方程为 } y = x + 2.$$

21. (I) 解: 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$. $f(1) = 0$.

$$\text{由题意, 函数 } f(x) \text{ 有唯一零点 } 1. f'(x) = 2x - \frac{a}{x}.$$

(1) 若 $a \leq 0$, 则 $-a \geq 0$.

显然 $f'(x) > 0$ 恒成立, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数.

又 $f(1) = 0$, 所以 $a \leq 0$ 符合题意.

(2) 若 $a > 0$, $f'(x) = \frac{2x^2 - a}{x}$.

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt{\frac{a}{2}}; \quad f'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < \sqrt{\frac{a}{2}}.$$

所以 $f(x)$ 在 $(0, \sqrt{\frac{a}{2}})$ 上是减函数, 在 $(\sqrt{\frac{a}{2}}, +\infty)$ 上是增函数.

$$\text{所以 } f(x)_{\min} = f\left(\sqrt{\frac{a}{2}}\right) = \frac{a}{2} - 1 - \frac{a}{2} \ln \frac{a}{2}.$$

由题意, 必有 $f\left(\sqrt{\frac{a}{2}}\right) \leq 0$ (若 $f\left(\sqrt{\frac{a}{2}}\right) > 0$, 则 $f(x) > 0$ 恒成立, $f(x)$ 无零点, 不符合题意).

$$\text{① 若 } f\left(\sqrt{\frac{a}{2}}\right) < 0, \text{ 则 } \frac{a}{2} - 1 - \frac{a}{2} \ln \frac{a}{2} < 0.$$

$$\text{令 } g(a) = \frac{a}{2} - 1 - \frac{a}{2} \ln \frac{a}{2} (a > 0), \text{ 则 } g'(a) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{a}{2} - \frac{a}{2} \times \frac{1}{a} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \ln \frac{a}{2}.$$

$$g'(a) > 0 \Leftrightarrow 0 < a < 2; \quad g'(a) < 0 \Leftrightarrow a > 2.$$

所以函数 $g(a)$ 在 $(0, 2)$ 上是增函数, 在 $(2, +\infty)$ 上是减函数.

所以 $g(a)_{\max} = g(2) = 0$. 所以 $g(a) \leq 0$, 当且仅当 $a = 2$ 时取等号.

$$\text{所以, } f\left(\sqrt{\frac{a}{2}}\right) < 0 \Leftrightarrow a > 0, \text{ 且 } a \neq 2.$$

$$\text{取正数 } b < \min\left\{\sqrt{\frac{a}{2}}, e^{-\frac{1}{a}}\right\}, \text{ 则 } f(b) = b^2 - 1 - a \ln b > -1 - a \ln b > -1 - a \times \left(-\frac{1}{a}\right) = 0;$$

$$\text{取正数 } c > a + 1, \text{ 显然 } c > 2\sqrt{a} > \sqrt{\frac{a}{2}}. \text{ 而 } f(c) = c^2 - 1 - a \ln c,$$

$$\text{令 } h(x) = \ln x - x, \text{ 则 } h'(x) = \frac{1}{x} - 1. \text{ 当 } x > 1 \text{ 时, 显然 } h'(x) = \frac{1}{x} - 1 < 0.$$

所以 $h(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上是减函数.

所以, 当 $x > 1$ 时, $h(x) = \ln x - x < h(1) = -1 < 0$, 所以 $\ln x < x$.

因为 $c > 1$, 所以 $f(c) = c^2 - 1 - a \ln c > c^2 - 1 - ac = c(c - a) - 1 > c \times 1 - 1 > 0$.

又 $f(x)$ 在 $(0, \sqrt{\frac{a}{2}})$ 上是减函数, 在 $(\sqrt{\frac{a}{2}}, +\infty)$ 上是增函数.

则由零点存在性定理, $f(x)$ 在 $(0, \sqrt{\frac{a}{2}})$ 、 $(\sqrt{\frac{a}{2}}, +\infty)$ 上各有一个零点.

可见, $0 < a < 2$, 或 $a > 2$ 不符合题意.

注: $a > 0$ 时, 若利用 $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = +\infty$, $f(\sqrt{\frac{a}{2}}) < 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 说明 $f(x)$ 在 $(0, \sqrt{\frac{a}{2}})$ 、 $(\sqrt{\frac{a}{2}}, +\infty)$

上各有一个零点.

②若 $f(\sqrt{\frac{a}{2}}) = 0$, 显然 $\sqrt{\frac{a}{2}} = 1$, 即 $a = 2$. 符合题意.

综上, 实数 a 的取值范围为 $\{a \mid a \leq 0, \text{或} a = 2\}$.

$$(II) \quad f(x) \leq e^{x-1} + x^2 - x - 1 \Leftrightarrow x - a \ln x - e^{x-1} \leq 0.$$

令 $g(x) = x - a \ln x - e^{x-1}$, 则 $g(x) \leq 0$ 对任意的 $x \geq 1$ 恒成立.

$$(1) \text{ 当 } a = 0 \text{ 时, } g(x) = x - e^{x-1}.$$

当 $x > 1$ 时, $g'(x) = 1 - e^{x-1} < 1 - e^0 = 0$, 所以 $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上是减函数.

所以, 当 $x \geq 1$ 时, $g(x) \leq g(1) = 0$. 可见, $a = 0$ 符合题意.

$$(2) \text{ 若 } a < 0, \text{ 显然 } g'(x) = 1 + \frac{-a}{x} - e^{x-1} \text{ 在 } [1, +\infty) \text{ 上是减函数.}$$

取实数 $m > -a + 1$, 显然 $m > 1$.

$$\text{则 } g'(m) = -(e^{m-1} + \frac{a}{m} - 1) \leq -[1 + (m-1) + \frac{a}{m} - 1] \quad (\text{利用 } e^{x-1} \geq 1 + (x-1))$$

$$= -\frac{m(m-1) + a}{m}$$

$$< -\frac{(-a+1)(-a+1-1) + a}{m} = -\frac{a^2}{m} < 0.$$

又 $g'(1) = -a > 0$, $g'(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上是减函数,

由零点存在定理, 存在唯一的 $x_0 \in (1, m)$ 使得 $g'(x_0) = 0$.

于是, 当 $x \in (1, x_0)$ 时, $g'(x) > 0$, 函数 $g(x)$ 在 $(1, x_0)$ 上是增函数.

所以, 当 $x \in (1, x_0)$ 时, $g(x) > g(1) = 0$. 可见, $a < 0$ 不符合题意.

当 $a > 0$ 时, 分如下三种解法:

解法一: (3) 若 $0 < a \leq 1$, $g'(x) = 1 - \frac{a}{x} - e^{x-1}$, $g''(x) = \frac{a - x^2 e^{x-1}}{x^2}$.

令 $h(x) = a - x^2 e^{x-1}$, 显然 $h(x) = a - x^2 e^{x-1}$ 在 $[1, +\infty)$ 上是减函数,

所以, 当 $x \geq 1$ 时, $h(x) \leq h(1) = a - 1 \leq 0$, 当且仅当 $a = 1$ 时取等号.

所以, 当 $x \geq 1$ 时, $g''(x) = \frac{h(x)}{x^2} \leq 0$, $g'(x) = 1 - \frac{a}{x} - e^{x-1}$ 在 $[1, +\infty)$ 上是减函数.

所以, 当 $x \geq 1$ 时, $g'(x) \leq g'(1) = -a < 0$.

所以, $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上是减函数.

所以, 当 $x \geq 1$ 时, $g(x) \leq g(1) = 0$. 可见, $0 < a \leq 1$ 符合题意.

(4) 若 $a > 1$, $g'(x) = 1 - \frac{a}{x} - e^{x-1}$, $g''(x) = \frac{a - x^2 e^{x-1}}{x^2}$.

令 $h(x) = a - x^2 e^{x-1}$, 显然 $h(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上是减函数, 且 $h(1) = a - 1 > 0$,

$h(a) = a - a^2 e^{a-1} < a - ae^{a-1} < a(1 - e^0) = 0$,

所以, 存在唯一的 $x_0 \in (1, a)$, 使得 $h(x_0) = 0$, 即 $e^{x_0-1} = \frac{a}{x_0^2}$ (★).

于是, 当 $x \in (1, x_0)$ 时, $h(x) > 0$; 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $h(x) < 0$.

所以, 当 $x \in (1, x_0)$ 时, $g''(x) > 0$; 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $g''(x) < 0$.

所以, $g'(x)$ 在 $(1, x_0)$ 上是增函数, 在 $(x_0, +\infty)$ 上是减函数.

所以, $g'(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上的最大值 $g'(x)_{\max} = g'(x_0) = 1 - \frac{a}{x_0} - e^{x_0-1}$.

将(★)式代入上式, 得 $g'(x)_{\max} = 1 - \frac{a}{x_a} - \frac{a}{x_a^2} < 1 - \frac{a}{a} - \frac{a}{x_a^2} = -\frac{a}{x_a^2} < 0$.

所以, 当 $x \geq 1$ 时, $g'(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上是减函数.

所以, 当 $x \geq 1$ 时, $g(x) \leq g(1) = 0$. 可见, $a > 1$ 符合题意.

综上, 所求 a 的取值范围是 $[0, +\infty)$.

解法二: (3) 若 $a > 0$, $g(x) \leq 0$ 对任意的 $x \geq 1$ 恒成立 $\Leftrightarrow e^{x-1} - x \geq -a \ln x$ 对任意的 $x \geq 1$ 恒成立.

令 $p(x) = e^{x-1} - x$, $q(x) = -a \ln x$.

$p'(x) = e^{x-1} - 1$, 当 $x > 1$ 时, $p'(x) = e^{x-1} - 1 > e^{1-1} - 1 = 0$,

所以 $p(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上是增函数. 所以 $p(x)_{\min} = p(1) = 0$.

显然 $q(x) = -a \ln x$ 在 $[1, +\infty)$ 上是减函数, $q(x)_{\max} = q(1) = 0$.

所以, 当 $x \geq 1$ 时, $p(x) \geq q(x)$, 即 $e^{x-1} - x \geq -a \ln x$ 对任意的 $x \geq 1$ 恒成立.

所以 $a > 0$ 符合题意.

综上, 所求 a 的取值范围是 $[0, +\infty)$.

解法三: (3) 若 $a > 0$, $g(x) = x - e^{x-1} - a \ln x \leq 0$ 对任意的 $x \geq 1$ 恒成立.

令 $p(x) = x - e^{x-1}$, $q(x) = -a \ln x$.

$p'(x) = 1 - e^{x-1}$, 当 $x > 1$ 时, $p'(x) = 1 - e^{x-1} < 1 - e^{1-1} = 0$,

所以 $p(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上是减函数. 所以 $p(x)_{\min} = p(1) = 0$.

所以, 当 $x \geq 1$ 时, $p(x) \leq 0$.

当 $a > 0$, $x \geq 1$ 时, $q(x) = -a \ln x \leq 0$.

所以, 当 $a > 0$, $x \geq 1$ 时, $g(x) = p(x) + q(x) \leq 0$ 恒成立.

所以 $a > 0$ 符合题意.

综上, 所求 a 的取值范围是 $[0, +\infty)$.

解法四: $f(x) = e^{x-1} + x^2 - x - 1 \Leftrightarrow e^{x-1} + a \ln x - x \geq 0$.

令 $g(x) = e^{x-1} + a \ln x - x$ ，则 $g(x) \geq 0$ 对任意的 $x \geq 1$ 恒成立.

$$g'(x) = e^{x-1} + \frac{a}{x} - 1 = \frac{xe^{x-1} - x + a}{x}.$$

令 $h(x) = xe^{x-1} - x + a$ ，当 $x > 1$ 时， $h'(x) = (x+1)e^{x-1} - 1 > (1+1)e^{1-1} - 1 > 0$ ，

所以 $h(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上是增函数.

(1) 若 $a \geq 0$ ，则 $x > 1$ 时， $h(x) > h(1) = a \geq 0$ ， $g'(x) = \frac{h(x)}{x} > 0$ ，

所以 $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上是增函数.

所以，当 $x \geq 1$ 时， $g(x) \geq g(1) = 0$. 可见， $a \geq 0$ 符合题意.

(2) 若 $a < 0$ ， $h(1) = a < 0$ ，

$$h(1-a) = (1-a)e^{-a} - 1 + 2a > (1-a)[1+(-a)] + 2a - 1 = a^2 > 0.$$

(这里利用了 $x > 0$ 时， $e^x > 1+x$)

又 $h(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上是增函数，由零点存在性定理，

知存在唯一的 $x_a \in (1, 1-a)$ ，使得 $h(x_a) = 0$.

于是，当 $x \in (1, x_a)$ 时， $h(x) < 0$ ， $g'(x) = \frac{h(x)}{x} < 0$ ，

所以， $g(x)$ 在 $(1, x_a)$ 上是减函数.

所以，当 $x \in (1, x_a)$ 时， $g(x) < g(1) = 0$. 可见， $a < 0$ 不符合题意.

综上，所求 a 的取值范围是 $[0, +\infty)$.

注：利用 $h(1) = a < 0$ ， $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$ ，说明 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上有零点.

$$\text{解法五： } f(x) \leq e^{x-1} + x^2 - x - 1 \Leftrightarrow x - a \ln x - e^{x-1} \leq 0.$$

令 $g(x) = x - a \ln x - e^{x-1}$ ，则 $g(x) \leq 0$ 对任意的 $x \geq 1$ 恒成立.

(1) 先寻求使结论成立的充分条件.

由 $g(1) = 0$ ，要使 $g(x) \leq 0$ 对任意的 $x \geq 1$ 恒成立.

只需要 $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上是减函数，即 $g'(x) \leq 0$ 对任意的 $x \geq 1$ 恒成立.

$$\text{而 } g'(x) = 1 - \frac{a}{x} - e^{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow a \geq x(1 - e^{x-1}),$$

所以, 只需要 $a \geq x(1 - e^{x-1})$ 对任意的 $x \geq 1$ 恒成立.

$$\text{令 } h(x) = x(1 - e^{x-1}), \quad h'(x) = 1 - e^{x-1} - xe^{x-1} = 1 - (x+1)e^{x-1}.$$

显然 $h'(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上是减函数,

$$\text{所以, 当 } x \geq 1 \text{ 时, } h'(x) \leq h'(1) = 1 - (1+1)e^{1-1} = -1 < 0.$$

所以 $h(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上是减函数.

$$\text{所以 } h(x) \text{ 在 } [1, +\infty) \text{ 上的最大值 } h(x)_{\max} = h(1) = 0.$$

$$\text{则只需要 } a \geq h(x)_{\max} (x \geq 1).$$

可见, 当 $a \geq 0$ 时, $g(x) \leq 0$ 对任意的 $x \geq 1$ 恒成立.

$$(2) \text{ 当 } a < 0 \text{ 时, } g'(1) = -a > 0,$$

$$\begin{aligned} g'(1-a) &= 1 - \frac{a}{1-a} - e^{(1-a)-1} \\ &= \frac{1-2a}{1-a} - e^{-a} \\ &< \frac{1-2a}{1-a} - [1+(-a)] \quad (x > 0 \text{ 时, } e^x > 1+x) \\ &= \frac{1-2a-(1-a)^2}{1-a} = -\frac{a^2}{1-a} < 0. \end{aligned}$$

$$\text{又 } a < 0 \text{ 时, } g'(x) = 1 + \frac{-a}{x} - e^{x-1} \text{ 在 } [1, +\infty) \text{ 上是减函数,}$$

$$\text{由零点存在定理, 存在唯一的 } x_a \in (1, 1-a), \text{ 使得 } g'(x_a) = 0.$$

$$\text{于是, 当 } x \in (1, x_a) \text{ 时, } g'(x) > g'(x_a) = 0,$$

所以 $g(x)$ 在 $(1, x_a)$ 上是增函数.

$$\text{所以, 当 } x \in (1, x_a) \text{ 时, } g(x) > g(1) = 0.$$

可见, $a < 0$ 不符合题意.

综上, 所求 a 的取值范围是 $[0, +\infty)$.

注: $a < 0$ 时, 用 $g'(1) = -a > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x_a) = -\infty$, 说明 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上有零点.

22. 选修 4-4: 坐标系与参数方程

解: (I) 曲线 C 的普通方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

当 $a=1$ 时, 直线 l 的普通方程为 $y=2x$.

$$\text{由 } \begin{cases} y=2x \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \cdot \text{解得 } \begin{cases} x = \frac{3}{\sqrt{10}} \\ y = \frac{6}{\sqrt{10}} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ y = -\frac{6}{\sqrt{10}} \end{cases},$$

直线 l 被曲线 C 截得的线段的长度为 $\sqrt{(2 \times \frac{3}{\sqrt{10}})^2 + (2 \times \frac{6}{\sqrt{10}})^2} = 3\sqrt{2}$.

(II) 解法一: $a=11$ 时, 直线 l 的普通方程为 $2x-y-10=0$.

由点到直线的距离公式, 椭圆 $\begin{cases} x=3\cos\theta \\ y=2\sin\theta \end{cases}$ 上的点 $M(3\cos\theta, 2\sin\theta)$ 到直线 $l: 2x-y-10=0$ 的距离为

$$\begin{aligned} d &= \frac{|6\cos\theta - 2\sin\theta - 10|}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{|2\sqrt{10}(\frac{3}{\sqrt{10}}\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{10}}\sin\theta) - 10|}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{|2\sqrt{10}\cos(\theta + \theta_0) - 10|}{\sqrt{5}}, \end{aligned}$$

其中 θ_0 满足 $\cos\theta_0 = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $\sin\theta_0 = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

由三角函数性质知, 当 $\theta + \theta_0 = 0$ 时, d 取最小值 $2\sqrt{5} - 2\sqrt{2}$.

此时, $3\cos\theta = 3\cos(-\theta_0) = \frac{9\sqrt{10}}{10}$, $2\sin\theta = 2\sin(-\theta_0) = -\frac{\sqrt{10}}{5}$.

因此, 当点 M 位于 $(\frac{9\sqrt{10}}{10}, -\frac{\sqrt{10}}{5})$ 时, 点 M 到 l 的距离取最小值 $2\sqrt{5} - 2\sqrt{2}$.

解法二: 当 $a=11$ 时, 直线 l 的普通方程为 $2x-y-10=0$.

设与 l 平行, 且与椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 相切的直线 m 的方程为 $2x - y + t = 0$.

$$\text{由} \begin{cases} 2x - y + t = 0 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \text{消去 } y \text{ 并整理得 } 40x^2 + 36tx + 9t^2 - 36 = 0.$$

由判别式 $\Delta = (36t)^2 - 4 \times 40 \times (9t^2 - 36) = 0$, 解得 $t = \pm 2\sqrt{10}$.

所以, 直线 m 的方程为 $2x - y + 2\sqrt{10} = 0$, 或 $2x - y - 2\sqrt{10} = 0$.

要使两平行直线 l 与 m 间的距离最小, 则直线 m 的方程为 $2x - y - 2\sqrt{10} = 0$.

这时, l 与 m 间的距离 $d = \frac{10 - 2\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} - 2\sqrt{2}$.

$$\text{此时点 } M \text{ 的坐标为方程组} \begin{cases} 2x - y - 2\sqrt{10} = 0 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \text{ 的解} \begin{cases} x = \frac{9\sqrt{10}}{10} \\ y = -\frac{\sqrt{10}}{5} \end{cases}.$$

因此, 当点 M 位于 $(\frac{9\sqrt{10}}{10}, -\frac{\sqrt{10}}{5})$ 时, 点 M 到直线 l 的距离取最小值 $2\sqrt{5} - 2\sqrt{2}$.

23. 选修 4-5: 不等式选讲

解: (I) 当 $a = 4$ 时, $f(x) = |3x - 4|$.

由 $|3x - 4| < 3$, 解得 $\frac{1}{3} < x < \frac{7}{3}$.

所以, 不等式 $f(x) < 3$ 的解集为 $\{x | \frac{1}{3} < x < \frac{7}{3}\}$.

$$(II) f(x) + g(x) = |3x - a| + |x + 1| = \left| 3\left(x - \frac{a}{3}\right) \right| + |x + 1|$$

$$= 2\left|x - \frac{a}{3}\right| + \left|x - \frac{a}{3}\right| + |x + 1|$$

$$\geq \left|x - \frac{a}{3}\right| + |x + 1| \quad (\text{当且仅当 } x = \frac{a}{3} \text{ 时取等号})$$

$$\geq \left|\left(x - \frac{a}{3}\right) - (x + 1)\right| \quad (\text{当且仅当 } (x - \frac{a}{3})(x + 1) \leq 0 \text{ 时取等号})$$

$$= \left| \frac{a}{3} + 1 \right|.$$

综上，当 $x = \frac{a}{3}$ 时， $f(x) + g(x)$ 有最小值 $\left| \frac{a}{3} + 1 \right|$.

故由题意得 $\left| \frac{a}{3} + 1 \right| > 1$ ，解得 $a < -6$ ，或 $a > 0$.

所以，实数 a 的取值范围为 $(-\infty, -6) \cup (0, +\infty)$.