

数学试卷参考答案 高二

一、选择题:

BBCCC CBAAB AA

二、填空题:

13. 30° ;14. $\frac{\sqrt{6}}{6}$;15. $\sqrt{3}x - 3y - \sqrt{3} + 6 = 0$ 或 $x = 1$; 16. $\frac{\sqrt{A^2a^2 + B^2b^2} + |C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

三、解答题:

17. 解: 设点 A 为 $\begin{cases} x + 3y - 4 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$, 即: $(1, 1)$ 设点 B 为 $\begin{cases} 3x + y + 4 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$, 即: $(-1, -1)$ 设点 C 为 $\begin{cases} x + 3y - 4 = 0 \\ 3x + y + 4 = 0 \end{cases}$, 即: $(-2, 2)$ 6 分(1) 若 $A(1, 1)$ 使 $z = 7x + \lambda y$ 取得最大值 8, 则 $7 + \lambda = 8$, $\therefore \lambda = 1$ 此时, $z = 7x + y$, $\therefore$ 过 $C(-2, 2)$ 时, z 取得最小值 -12.(2) 若 $B(-1, -1)$ 使 $z = 7x + \lambda y$ 取得最大值 8, 则 $-7 - \lambda = 8$, $\therefore \lambda = -15$ 此时, $z = 7x - 15y$, $\therefore$ 过 $C(-2, 2)$ 时, z 取得最小值 -44.(3) 若 $C(-2, 2)$ 使 $z = 7x + \lambda y$ 取得最大值 8, 则 $-14 + 2\lambda = 8$, $\therefore \lambda = 11$ 此时, $z = 7x + 11y$, $\therefore$ 过 $A(1, 1)$ 时, z 取得最大值 18.这与 z 的最大值 8 矛盾.综上, 当 $\lambda = 1$ 时, z 的最小值为 -12; 当 $\lambda = 11$ 时, z 的最小值为 -44.

.....12 分

18. 解: (1) (1) 当 OP 所在直线倾斜角等于 0° 时,

$$\frac{1}{|OP|^2} + \frac{1}{|OQ|^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2} \dots$$

(2) 当 OP 所在直线倾斜角等于 90° 时,

$$\frac{1}{|OP|^2} + \frac{1}{|OQ|^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2} \dots 3 \text{ 分}$$

(3)当 OP 所在直线倾斜角不等于 0° 也不等于 90° 时,

设 PO 所在直线为: $y = kx$, 则 OQ 所在直线为: $y = -\frac{1}{k}x$

$$\text{点 } P \text{ 满足: } \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = kx \end{cases} \quad \therefore |x_P| = \frac{ab}{\sqrt{b^2 + a^2 k^2}}$$

$$\therefore |PO| = \sqrt{1+k^2} |x_P| = \frac{ab\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{a^2 k^2 + b^2}} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{同理: } |QO| = \frac{ab\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 k^2}}$$

$$\therefore \frac{1}{|OP|^2} + \frac{1}{|OQ|^2} = \frac{a^2 k^2 + b^2}{a^2 b^2 (1+k^2)} + \frac{a^2 + b^2 k^2}{a^2 b^2 (1+k^2)} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}$$

$$\text{综上, } \frac{1}{|OP|^2} + \frac{1}{|OQ|^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

(II) 对于双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$), $\frac{1}{|OP|^2} + \frac{1}{|OQ|^2}$ 仍为定值.10 分

$$\text{该数值为 } \frac{1}{|OP|^2} + \frac{1}{|OQ|^2} = \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. 证明: (I) 连结 CB_1 交 BC_1 于 O , 连结 OD

$\therefore OD \parallel AB_1, OD$ 在面 DBC_1 内

$\therefore AB_1 \parallel$ 平面 DBC_1 4 分

(II) ① $OD \perp BC_1$, 又 O 为 BC_1 中点 $\therefore BD = DC_1 \therefore CC_1 = \sqrt{2}$

过 O 作 $OM \perp BC_1$ 交 BC 于 H , 则 $OH = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\angle HOD$ 为所求.6 分

$$BH = \frac{3}{2}, DH = \frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \therefore \theta = 45^\circ \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

② 连结 A_1E 、 A_1D , 点 E 是线段 A_1B 的中点.

$$V_{E-BDC_1} = \frac{1}{2} V_{A_1-BDC_1} = \frac{1}{2} V_{B-A_1DC_1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{6} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

20. 解: (1) 如图 O 为底面 $ABCD$ 的中心, 则 $\angle PAO$ 为 PA 与底面所成的角.

$$\therefore \angle PAO = 60^\circ$$

$$\because AO = \sqrt{2} \quad \therefore PO = \sqrt{6}, PA = 2\sqrt{2} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

过 O 作 $OM \perp BC$ 于 M , 连 PM 由三垂线定理得 $BC \perp PM$

$\therefore \angle PMO$ 为侧面与底面所成二面角的平面角 $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

$$\because OM = 1, PO = \sqrt{6},$$

$$\therefore \tan \angle PMO = \sqrt{6} \text{ 即侧面与底面所成角为 } \arctan \sqrt{6} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

(II) 在平面 PAC 中, 过点 A 作 PC 的垂线, 交 PC 于 F
易见 F 为 PC 中点;

在平面 PBC 中, 过点 F 作 PC 的垂线, 交 PB 于 E ;
点 E 即为所求. $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

下面证明 $AE \perp PC$.

$$\text{连结 } AE. \begin{cases} AF \perp PC \\ EF \perp PC \end{cases} \Rightarrow PC \perp \text{平面 } AFE \Rightarrow PC \perp AE.$$

$\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

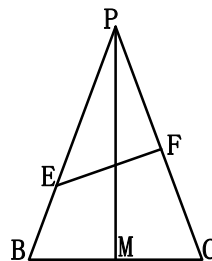
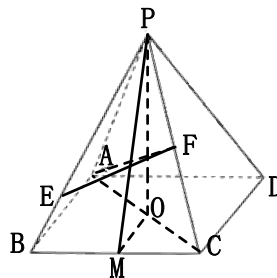
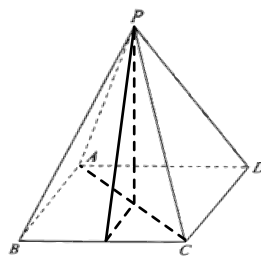
下面确定 E 的位置.

$$\text{在 } \triangle PBC \text{ 中, } PB = PC = 2\sqrt{2}, BC = 2$$

$$\therefore \cos \angle BPC = \frac{3}{4}$$

$$\text{在 } \triangle PFE \text{ 中, } PF = \sqrt{2}, \cos \angle EPF = \frac{3}{4}$$

$$\therefore PE = \frac{4\sqrt{2}}{3}, (EB = \frac{2\sqrt{2}}{3}) \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$



21. 解: (I) 设点 $P(x, y)$ 是曲线 C' 上任意一点, 点 P 关于 l 的对称点是点 $Q(m, n)$.

$$\therefore \begin{cases} \frac{y-n}{x-m} = -\sqrt{3} \\ \frac{y+n}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(\frac{x+m}{2}\right) \\ n = \frac{\sqrt{3}}{3}m + \frac{\sqrt{3}}{m} \end{cases} \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\therefore \begin{cases} m = \frac{x + \sqrt{3}y}{2} \\ n = \frac{\sqrt{3}x - y}{2} \\ n = \frac{\sqrt{3}}{3}m + \frac{\sqrt{3}}{m} \end{cases} \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}x - y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{x + \sqrt{3}y}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{x + \sqrt{3}y}$$

$$\text{即曲线 } C' \text{ 的方程为: } \frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{2} = 1 \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

(II) 曲线 C' 是双曲线, 其焦点坐标分别是 $(2\sqrt{2}, 0)$ 和 $(-2\sqrt{2}, 0)$ 10 分

$$\therefore \begin{cases} m = \frac{x + \sqrt{3}y}{2} \\ n = \frac{\sqrt{3}x - y}{2} \end{cases} \therefore \begin{cases} m = \sqrt{2} \\ n = \sqrt{6} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} m = -\sqrt{2} \\ n = -\sqrt{6} \end{cases}$$

$\therefore$ 曲线 C 是双曲线, 其焦点坐标分别为 $(\sqrt{2}, \sqrt{6})$ 和 $(-\sqrt{2}, -\sqrt{6})$ 12 分

22. 解: (I) 焦点 F 的坐标为 $(-1, 0)$, 点 M 的坐标为 $(1, 0)$2 分
 设直线 l 方程为: $y = k(x - 1)$.

$$\therefore A、B \text{ 满足 } \begin{cases} y^2 = -4x \\ y = k(x - 1) \end{cases} \therefore k^2(x - 1)^2 = -4x$$

$$\therefore k^2x^2 + 2(2-k^2)x + k^2 = 0,$$

当 $k=0$ 时, 不合题意,

$$\text{当 } k \neq 0 \text{ 时: } \Delta = 4(2-k^2)^2 - 4k^4 = 16(1-k^2) > 0$$

$$\therefore -1 < k < 1 \text{ 且 } k \neq 0 \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{又 } \because x_A + x_B = \frac{2(k^2-2)}{k^2}, \quad \begin{cases} x_P = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_P = k(x_P - 1) \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x_P = 1 - \frac{2}{k^2} \\ y_P = -\frac{2}{k} \end{cases} \quad (-1 < k < 1 \text{ 且 } k \neq 0) \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{弦 } AB \text{ 的垂直平分线为: } y - \left(-\frac{2}{k}\right) = \left(-\frac{1}{k}\right)\left[x - \left(1 - \frac{2}{k^2}\right)\right]$$

$$\therefore \text{点 } E(x_0, 0) \text{ 满足: } 0 - \left(-\frac{2}{k}\right) = \left(-\frac{1}{k}\right)\left[x_0 - \left(1 - \frac{2}{k^2}\right)\right]$$

$$\therefore x_0 = -1 - \frac{2}{k^2} \quad (-1 < k < 1 \text{ 且 } k \neq 0) \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\therefore x_0 < -3 \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$(II) \text{ } EF \text{ 的中点为 } \left(-1 - \frac{1}{k^2}, 0\right) \therefore EF \text{ 的垂直平分线为 } x = -1 - \frac{1}{k^2}.$$

$$\text{又 } \because x_P = 1 - \frac{2}{k^2} \quad (-1 < k < 1 \text{ 且 } k \neq 0)$$

$$\therefore 1 - \frac{2}{k^2} = -1 - \frac{1}{k^2} \quad (-1 < k < 1 \text{ 且 } k \neq 0) \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$\text{即: } k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \therefore \text{当 } k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 时, } \triangle PEF \text{ 是以 } EF \text{ 为底的等腰三角形. } \dots\dots 14 \text{ 分}$$