

高二理科数学参考答案

一、选择题

1. B 2. D 3. A 4. C 5. B 6. A 7. D 8. D 9. A 10. B 11. C 12. A

二、填空题

13. $x^2 + y^2 = 1 (y \neq 0)$ 14. $\frac{2}{3}$ 15. 1048575 16. ② ③ ④

三、解答题

17、解：当 $a = 0$ 时，原不等式化为 $\frac{-x}{(x+1)(x-1)} > 0$

即 $\frac{-x}{(x+1)(x-1)} > 0$ 解得 $x < -1$ 或 $0 < x < 1$ ；……………2 分

当 $a < 0$ 时，原不等式化为 $\frac{(x - \frac{1}{a})(x - a)}{(x+1)(x-1)} < 0$ ，……………4 分

若 $-1 < a < 0$ ，则 $\frac{1}{a} < -1 < a < 1$ $\therefore \frac{1}{a} < x < -1$ 或 $a < x < 1$ ；……………6 分

若 $a = -1$ ，则 $\frac{x+1}{x-1} < 0$ $\therefore -1 < x < 1$ ；……………8 分

若 $a < -1$ ，则 $a < -1 < \frac{1}{a} < 1$ $\therefore a < x < -1$ 或 $\frac{1}{a} < x < 1$ ……………10 分

综上所述：当 $a = 0$ 时，解集为 $\{x | x < -1 \text{ 或 } 0 < x < 1\}$ ；

当 $-1 < a < 0$ 时，解集为 $\{x | \frac{1}{a} < x < -1 \text{ 或 } a < x < 1\}$ ；

当 $a = -1$ 时，解集为 $\{x | -1 < x < 1\}$ ；

当 $a < -1$ 时，解集为 $\{x | a < x < -1 \text{ 或 } \frac{1}{a} < x < 1\}$ ……………12 分

18、解：(1) 由题设 $2a_3 = a_1 + a_2$ ，即 $2a_1q^2 = a_1 + a_1q$ ， $\because a_1 \neq 0, \therefore 2q^2 - q - 1 = 0$.

$\therefore q = 1$ 或 $-\frac{1}{2}$ ……………4 分

(2) 若 $q = 1$ ，则 $b_n = n + 1$ ， $S_n = 2n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 1 = \frac{n^2 + 3n}{2}$.

当 $n \geq 2$ 时 $S_n - b_n = S_{n-1} = \frac{(n-1)(n+2)}{2} > 0$. 故 $S_n > b_n$ ……………8 分

若 $q = -\frac{1}{2}$ ，则 $b_n = \frac{-n+5}{2}$ ， $S_n = \frac{-n^2 + 9n}{4}$ 。

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时 } S_n - b_n = S_{n-1} = \frac{(n-1)(10-n)}{4}.$$

故对于 $n \in N_+$, 当 $2 \leq n \leq 9$ 时, $S_n > b_n$;

当 $n = 10$ 时, $S_n = b_n$;

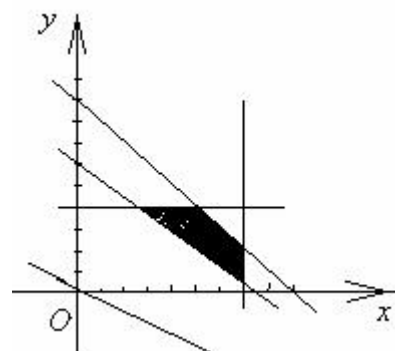
当 $n \geq 11$ 时, $S_n < b_n$12 分.

19、解：设每天派出 x 辆 A 型卡车, y 辆 B 型卡车,2 分

公司所花成本 $z = 160x + 252y$,4 分

由题意的线性约束条件为

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 7 \\ 0 \leq y \leq 4 \\ x + y \leq 9 \\ 48x + 60y \geq 360 \\ x, y \in N \end{cases} \quad \text{.....6 分}$$



作出线性约束条件对应的平面区域如右图（用阴影表示） 8 分

由图可知目标函数取得最小值的点为 $A(5,2)$,10 分

所以最小值 $z_{\min} = 1304$ (元)

答：每天派出 5 辆 A 型卡车, 2 辆 B 型卡车, 公司所花的成本费最低, 最低为 1304 元。12 分

20、解：(1) 由已知得 $2a_n = S_n + 2$,

当 $n = 1$ 时, $a_1 = 2$, 当 $n \geq 2$ 时 $2a_{n-1} = S_{n-1} + 2$,

两式相减得 $a_n = 2a_{n-1}$, 即 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = 2$,

$\therefore \{a_n\}$ 是以 2 为首项, 2 为公比的等比数列 $\therefore a_n = 2^n$

又 $b_n - b_{n+1} + 2 = 0$, 即 $b_{n+1} - b_n = 2$,

$\therefore \{b_n\}$ 是以 1 为首项, 2 为公差的等差数列, $\therefore b_n = 2n - 1$ 4 分

(2) $T_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n}$ ①6 分

$$\frac{1}{2}T_n = \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{5}{2^4} + \dots + \frac{2n-1}{2^{n+1}} \quad \text{②}$$

$$\textcircled{1}-\textcircled{2} \text{ 得 } \frac{1}{2}T_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \dots + \frac{2}{2^n} - \frac{2n-1}{2^{n+1}} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2n-1}{2^{n+1}} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\therefore T_n = 3 - \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^n} < 3 \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{又 } T_4 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \frac{7}{2^4} = \frac{37}{16} > 2$$

$\therefore$ 满足条件 $T_n < c$ 的最小值整数 $c = 3$ 。 $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

21、解：（1）不等式 $f(x) + f(-x) \leq 2|x|$ 可化为 $2x^2 \leq 2|x|$ ，即 $x^2 \leq |x|$ 。

当 $x \geq 0$ 时， $x^2 \leq x \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$ ；

当 $x < 0$ 时， $x^2 \leq -x \Rightarrow -1 \leq x < 0$ ，所以集合 $C = [-1, 1]$ $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

（2）易得 $A = [-\frac{1}{4}, 2]$ 。 $g(x) = (x-t)^2 - t^2 + t$

$\textcircled{1}$ 当 $t \leq 0$ 时， $B = [t, 1-t]$ ； $\because A \subseteq B$ ， $\therefore \begin{cases} t \leq -\frac{1}{4} \\ 2 \leq 1-t \end{cases}$ 解得 $t \leq -1$ $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

$\textcircled{2}$ 当 $0 < t \leq \frac{1}{2}$ 时， $B = [-t^2 + t, 1-t]$ ， $\because A \subseteq B$ ， $\therefore \begin{cases} -t^2 + t \leq -\frac{1}{4} \\ 2 \leq 1-t \end{cases}$ 无解； $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

$\textcircled{3}$ 当 $\frac{1}{2} < t < 1$ 时， $B = [-t^2 + t, t]$ ， $\because A \subseteq B$ ， $\therefore \begin{cases} -t^2 + t \leq -\frac{1}{4} \\ 2 \leq t \end{cases}$ 无解； $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

$\textcircled{4}$ 当 $t \geq 1$ 时， $B = [1-t, t]$ ， $\because A \subseteq B$ ， $\therefore \begin{cases} 1-t \leq -\frac{1}{4} \\ 2 \leq t \end{cases}$ 解得 $t \geq 2$ ， $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

综上所述，实数 t 的取值范围为 $t \leq -1$ 或 $t \geq 2$ $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

22. 解：（1） $\because \vec{a} = x \cdot \vec{j} + (y+2) \cdot \vec{j}, \vec{b} = x \cdot \vec{i} + (y-2) \cdot \vec{j}$ ，且 $|\vec{a}| + |\vec{b}| = 8$ ，

$\therefore$ 点 $M(x, y)$ 到两个定点 $F_1(0, -2)$ ， $F_2(0, 2)$ 的距离之和为 8。 $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

$\therefore$ 轨迹 C 为以 F_1 、 F_2 为焦点的椭圆，方程为 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$ ， $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

（2） $\because l$ 过 y 轴上的点 $(0, 3)$ ，若直线 l 是 y 轴，则 A 、 B 两点是椭圆的顶点。

$\because \vec{OP} = \vec{OA} + \vec{OB} = 0$ ， $\therefore P$ 与 O 重合，与四边形 $OAPB$ 是矩形矛盾， $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

$\therefore$ 直线 l 的斜率存在，设 l 方程为 $y = kx + 3$ ， $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ 。

$$\text{由} \begin{cases} y = kx + 3, \\ \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1 \end{cases} \text{消去 } y \text{ 得: } (4 + 3k^2)x^2 + 18kx - 21 = 0.$$

此时, $\Delta = (18k)^2 - 4(4 + 3k^2)(-21) > 0$ 恒成立.

$$\text{且 } x_1 + x_2 = -\frac{18k}{4 + 3k^2}, x_1 x_2 = -\frac{21}{4 + 3k^2}. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$\therefore \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}, \therefore$ 四边形 OAPB 是平行四边形,

若存在直线 l , 使得四边形 OAPB 是矩形, 则 $OA \perp OB$, 即 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$.

$$\therefore \overrightarrow{OA} = (x_1, y_1), \overrightarrow{OB} = (x_2, y_2), \therefore \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{即 } (1 + k^2)x_1 x_2 + 3k(x_1 + x_2) + 9 = 0,$$

$$\text{也即 } (1 + k^2) \cdot \left(-\frac{21}{4 + 3k^2}\right) + 3k \cdot \left(-\frac{18k}{4 + 3k^2}\right) + 9 = 0,$$

$$\text{即 } k^2 = \frac{5}{16}, \text{解得 } k = \pm \frac{\sqrt{5}}{4}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{存在直线 } l: y = \pm \frac{\sqrt{5}}{4}x + 3, \text{ 使得四边形 OAPB 是矩形.} \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$