2018届高三仿真试题（一）

理　　数

时　间：120分钟　　　分　值：150分

注意事项：

1.本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分.

2.答题前，考生务必将自己的姓名、座位号填写在答题卡相应的位置.

3.考试结束后，将本试题和答题卡一并交回.

第Ⅰ卷（选择题 共60分）

一、选择题：本大题共12个小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.复数$z=\dfrac{i}{1-i}$的实部为　　　　（　　）

A. $\dfrac{1}{2}$　　　　B. $\dfrac{i}{2}$　　　　C. $-\dfrac{1}{2}$　　　　D. $-\dfrac{i}{2}$

2.集合$P=\left\{x\left|\dfrac{x-1}{x+3}>0\right.\right\},Q=\left\{x\left|y=\sqrt{4-x^2}\right.\right\}$，则$P\cap Q=$　　　　（　　）

A. $(1,2]$　　　　B. $[1,2]$　　　　C. $(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$　　　　D. $[1,2)$

3.设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=4$，$S_5\ge S_4\ge S_6$，则公差d的取值范围是　　（　　）

A. $\left[-1,-\dfrac{8}{9}\right]$　　　　B. $\left[-1,-\dfrac{4}{5}\right]$　　　　C. $\left[-\dfrac{8}{9},-\dfrac{4}{5}\right]$　　　　D. $[-1,0]$

4.已知“$x\ge a\Rightarrow x>b$”，且“$x<a\Rightarrow x\le c$”，则“$x\le c$”是“$x\le b$”的　　　　（　　）

A.充分不必要条件　　　　B.必要不充分条件

C.充要条件　　　　D.既不充分也不必要条件

5.已知实数x,y满足约束条件$\begin{cases}x\ge 1,\\ x+y\le 3,\\ x-2y-3\le 0,\end{cases}$，则$z=2x+y$的最小值为

（　　）

A. -1　　　　B. 1　　　　C. -2　　　　D. 3

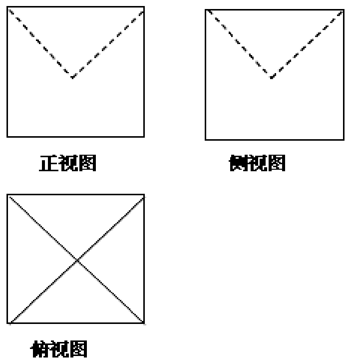
6.甲罐中有5个红球，2个白球和3个黑球。乙罐中有4个红球，3个白球和3个黑球. 先从甲罐中

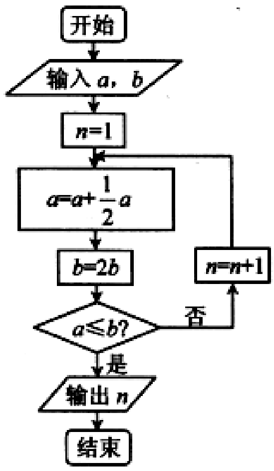
随机取出一球放入乙罐，再从乙罐中随机取出一球，分别以 A_1， A_2 和 A_3 表示由甲罐取出的球是红球，白球和黑球的事件，以 B 表示由乙罐取出的球是红球的事件．则事件 B 发生的概率 $P(B|A_1)=$ （　　）

A. $\dfrac{5}{11}$　　B. $\dfrac{5}{22}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{4}{5}$

7. 某几何体的三视图如图所示，图中的四边形都是边长为 4 的正方形，两条虚线互相垂直，则该几何体的体积是 （　　）

A. $\dfrac{176}{3}$　　B. $\dfrac{160}{3}$　　C. $\dfrac{128}{3}$　　D. 32





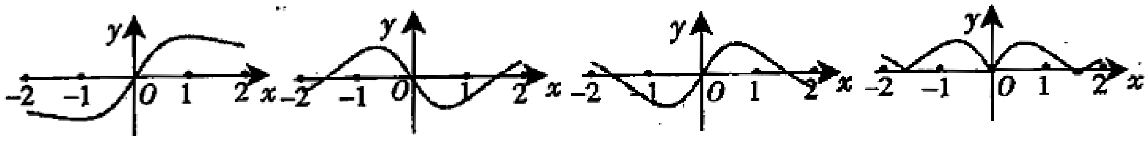
（第 8 题

（第 7 题图）

8. 宋元时期数学名著《算学启蒙》中有关于“松竹并生”的问题：松长五尺，竹长两尺，松日自半，竹日自倍，松竹何日而长等．右图是源于其思想的一个程序框图，若输入的 a 、b 分别为 5 、2 ，则输出的 $n=$ （　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

9. 函数 $f(x)=\dfrac{x\cos x}{x^2+1}$ $(x\in[-2,2])$ 的大致图象是 （　　）



A.　　B.　　C.　　D.

10. 已知 $AB \perp AC$， $AB = AC$，点 M 满足 $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} + (1-t)\overrightarrow{AC}(0<t<1)$，若 $\angle BAM = \dfrac{\pi}{3}$，则 t 的值为　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）

A. $\sqrt{3}-\sqrt{2}$　　　B. $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$　　　C. $\sqrt{2}-1$　　　D. $\dfrac{\sqrt{3}+1}{3}$

11．已知在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，△ABC 为等腰直角三角形，$AB=AC=4$，$AA_1=a$，过顶点 A、线段 BB_1 的中点与 B_1C_1 的中点的平面与平面 AA_1C_1C 相交所得交线与 BB_1 所成角的正切值为 $\dfrac{2}{3}$，则三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球的半径为　　　　　　　　　　（　　）

A．$4\sqrt{3}$　　　B．$3\sqrt{3}$　　　C．$2\sqrt{3}$　　　D．$\sqrt{3}$

12．已知 F_1， F_2 分别是双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$**错误!未找到引用源。**($a>0$，$b>0$)的两个焦点，若在双曲线上存在点 P 满足 $2|\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}|\leqslant|\overrightarrow{F_1F_2}|$，则双曲线 C 的离心率的取值范围是

（　　）

A．(1，**错误!未找到引用源。**$\sqrt{2}$]　　　B．(1，2]　　　C．[**错误!未找到引用源。**$\sqrt{2}$，+∞)　　　D．[2，+∞)

第II卷（非选择题　共 90 分）

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.）

13. 已知 $A=\{(x,y)\,\|\,x|\le 2,|y|\le 2\}$， $B=\left\{(x,y)\middle|y\ge\sqrt{4-x^2}\right\}$，现向集合 A 所在区域内投点，则该点落在集合 B 所在区域内的概率为____________.

14. 在数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$中，b_n是a_n与a_{n+1}的等差中项，$a_1=3$，且对任意的$n\in N^+$都有$4a_{n+1}-a_n=0$，则$\{b_n\}$的通项公式b_n为__________.

15. 设椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 F，过点 F 的直线 l 与椭圆 C 相交于 A，B 两点，直线 l 的倾斜角为 60°, $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$. 则椭圆 C 的离心率是 ________.

16. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2-|x+2|, x\leqslant 0\\ x^2, x>0\end{cases}$，$g(x)=k(x-\frac{4}{3})$（$k\in R$）．若存在唯一的整数 x，使得 $\frac{f(x)-g(x)}{x}<0$，则 k 的取值范围是____________.

三、解答题：本大题共 6 小题，第 22（或 23）小题 10 分，其余每题均为 12 分，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程、计算步骤.

17.（本小题满分 12 分）在 ΔABC 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，向量 $\vec{m}=(a+b,\sin A-\sin C)$，向量 $\vec{n}=(c,\sin A-\sin B)$，且 $\vec{m}//\vec{n}$.

（Ⅰ）求角 B 的大小；

（Ⅱ）设 BC 中点为 D，且 $AD=\sqrt{3}$，求 $a+2c$ 的最大值及此时 ΔABC 的面积。

18. （本小题满分 12 分）第一届“一带一路”国际合作高峰论坛于 2017 年 5 月 14 日至 15 日在北京举行,这是 2017 年我国重要的主场外交活动,对推动国际和地区合作具有重要意义.某高中政教处为了调查学生对“一带一络″的关注情况,在全校组织了“一带一路知多少”的知识问卷测试,并从中随机抽取了 12 份问卷,得到其测试成绩(百分制),如茎叶图所示.

（Ⅰ）写出该样本的众数、中位数,若该校共有 3000 名学生,试估计该校测试成绩在 70 分以上的人数；

（Ⅱ）从所抽取的 70 分以上的学生中再随机选取 4 人.记ξ表示测试成绩在 80 分以上的人数,求ξ的分布列和数学期望.

	成绩
5	2
6	3 7 8
7	2 6 6 6
8	2 8
9	3 4

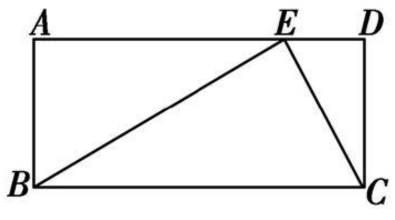
（第 18 题图）

19.（本小题满分 12 分）已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，且$\left|F_1F_2\right|=4\sqrt{3}$，点$A\left(\sqrt{3},-\frac{\sqrt{13}}{2}\right)$的椭圆上的点.

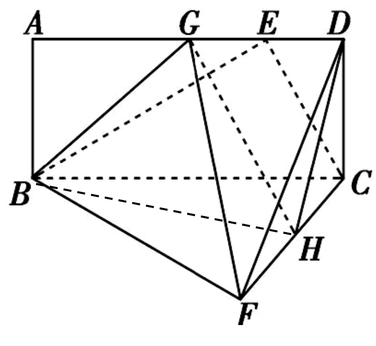
（Ⅰ）求椭圆的C标准的方程；

（Ⅱ）若T为椭圆C上异于顶点的任意一点，M、N分别是椭圆C的上顶点和右顶点，直线TM交x轴于P，直线TN交y轴于Q，证明$\left|PN\right|\cdot\left|QM\right|$为定值.

20.（本小题满分 12 分）已知在如图①所示的矩形 $ABCD$ 中，$AB=\sqrt{3}$，$AD=4$，E 为 AD 上靠近 D 的一个四等分点．现将△BCE 以 BC 为旋转轴旋转到△BCF，使平面 BCF⊥平面 $ABCD$，设 G，H 分别为 AD，CF 的中点，如图②所示．



图①



图②

（Ⅰ）求证：平面 BGF⊥平面 CDF；

（Ⅱ）求平面 BGF 与平面 DGH 夹角的余弦值.

21.（本小题满分 12 分）已知 $f(x)=e^{x}-ax^{2}$，曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=bx+1$.

（Ⅰ）求 a,b 的值；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值；

（III）证明：当 $x>0$ 时，$e^{x}+(1-e)x-a\ln x-1\geq 0$.

选考部分:共 10 分。请考生在 22、23 两题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22．（本小题满分 10 分）（选修 4-4：坐标系与参数方程）

在直角坐标系 xOy 中，曲线 M 的参数方程为 $\begin{cases} x=\sin\theta+\cos\theta \\ y=\sin 2\theta \end{cases}$（$\theta$ 为参数），若以该直角坐标系的原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 N 的极坐标方程为：$\rho\sin(\theta+\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t$（其中 t 为常数）.

（Ⅰ）若曲线 N 与曲线 M 只有一个公共点，求 t 的取值范围；

（Ⅱ）当 $t=-2$ 时，求曲线 M 上的点与曲线 N 上点的最小距离.

23.（本小题满分 10 分）（选修 4-5：不等式选讲）

已知函数 $f\left(x\right)=\left|x\right|+\left|x-1\right|$.

（Ⅰ）解不等式 $f\left(x\right)\geq 3$；

（Ⅱ）若 $f\left(x\right)+f\left(y\right)\leq 2$，求 $x+y$ 的取值范围.

舒城中学2018届高三高考仿真试题（一）

理科数学试题（参考答案）

注意事项：

1.本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分.

2.答题前，考生务必将自己的姓名、座位号填写在答题卡相应的位置.

3.考试结束后，将本试题和答题卡一并交回.

第Ⅰ卷（选择题 共60分）

一、选择题：本大题共12个小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.复数$z=\frac{i}{1-i}$的实部为（ C ）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{i}{2}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{i}{2}$

2.集合$P=\left\{x\left|\frac{x-1}{x+3}>0\right.\right\},Q=\left\{x\left|y=\sqrt{4-x^2}\right.\right\}$,则$P\cap Q=$（ A ）

A. $(1,2]$　　B. $[1,2]$　　C. $(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$　　D. $[1,2)$

3.设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=4$，$S_5\ge S_4\ge S_6$，则公差d的取值范围是（ A ）

A.$\left[-1,-\frac{8}{9}\right]$　　B.$\left[-1,-\frac{4}{5}\right]$　　C.$\left[-\frac{8}{9},-\frac{4}{5}\right]$　　D.$[-1,0]$

4.已知“$x\ge a\Rightarrow x>b$”，且“$x<a\Rightarrow x\le c$”，则“$x\le c$”是“$x\le b$”的（ B ）

A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件

C.充要条件　　D.既不充分也不必要条件

5.已知实数x,y满足约束条件$\begin{cases}x\ge 1,\\ x+y\le 3,\\ x-2y-3\le 0,\end{cases}$，则$z=2x+y$的最小值为（ B ）

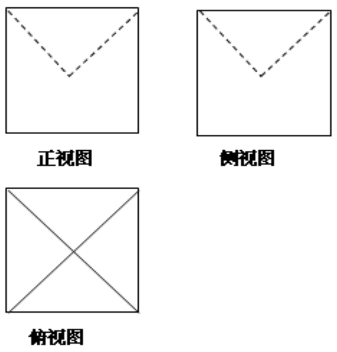
A．-1　　B. 1　　C. -2　　D. 3

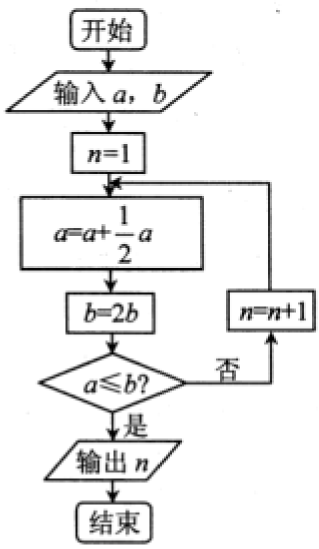
6.甲罐中有5个红球，2个白球和3个黑球。乙罐中有4个红球，3个白球和3个黑球．先从甲罐中随机取出一球放入乙罐，再从乙罐中随机取出一球，分别以A_1，A_2和A_3表示由甲罐取出的球是红球，白球和黑球的事件，以B表示由乙罐取出的球是红球的事件．则事件B发生的概率$P(B|A_1)=$（ A ）

A. $\dfrac{5}{11}$　　　　B. $\dfrac{5}{22}$　　　　C. $\dfrac{1}{2}$　　　　D. $\dfrac{4}{5}$

7.某几何体的三视图如图所示，图中的四边形都是边长为4的正方形，两条虚线互相垂直，则该几何体的体积是（ B ）

A. $\dfrac{176}{3}$　　　　B. $\dfrac{160}{3}$　　　　C. $\dfrac{128}{3}$　　　　D. 32





8.宋元时期数学名著《算学启蒙》中有关于“松竹并生”的问题：松长五尺，竹长两尺，松日自半，竹日自倍，松竹何日而长等. 右图是源于其思想的一个程序框图，若输入的a、b分别为5、2，则输出 的$n=$（ C ）

A. 2　　　　B. 3　　　　C. 4　　　　D. 5

9. 函数 $f(x)=\dfrac{x\cos x}{x^2+1}\ (x\in[-2,2])$ 的大致图象是（ C ）

A.　　　　B.　　　　C.　　　　D.

10. 已知 $AB\perp AC$， $AB=AC$，点 M 满足 $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}+(1-t)\overrightarrow{AC}(0<t<1)$，若 $\angle BAM=\dfrac{\pi}{3}$，则 t 的值为（ B ）

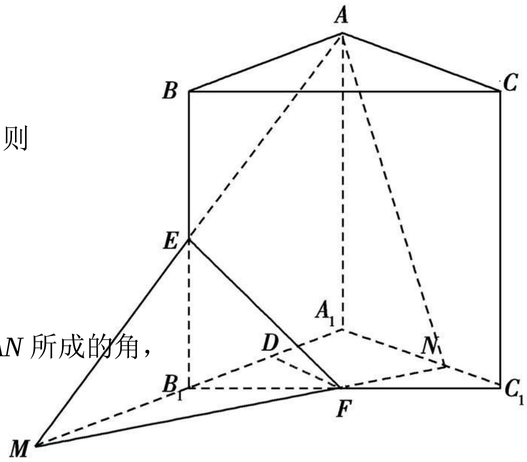
A. $\sqrt{3}-\sqrt{2}$　　　　B. $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$　　　　C. $\sqrt{2}-1$　　　　D. $\dfrac{\sqrt{3}+1}{3}$

11．已知在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，$AB=AC=4$，$AA_1=a$，过顶点 A、

线段 BB_1 的中点与 B_1C_1 的中点的平面与平面 AA_1C_1C 相交所得交线与 BB_1 所成角的正切值为 $\frac{2}{3}$，则三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球的半径为（ C ）

A. $4\sqrt{3}$　　B. $3\sqrt{3}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{3}$

【解析】如图，设 BB_1 与 B_1C_1 的中点分别为 *E*、*F*，平面 *AEF* 截三棱柱所得的截面为四边形 *AEFN*，其中过点 *A*、线段 BB_1 的中点与 B_1C_1 的中点的平面与平面 AA_1C_1C 相交所得交线为 *AN*，



延长 *AE*、A_1B_1、*NF* 交于点 *M*，取 A_1B_1 的中点 *D*，连接 *DF*，则 *DF*=2，MB_1=4，△MDF∽△MA_1N，则 $\frac{MD}{MA_1}=\frac{DF}{A_1N}$，即 $\frac{6}{8}=\frac{2}{A_1N}$，得 $A_1N=\frac{8}{3}$，

因为 AA_1 ∥ BB_1，所以∠A_1AN 为异面直线 BB_1 与 *AN* 所成的角，

所以 $\tan\angle A_1AN=\frac{A_1N}{AA_1}=\frac{\frac{8}{3}}{a}=\frac{2}{3}$，所以 *a*=4．将三棱柱补成正方体，所以外接球的半径为 $2\sqrt{3}$．

12．已知 F_1，F_2 分别是双曲线 *C*：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$**错误!未找到引用源。**(*a*>0，*b*>0)的两个焦点，若在双曲线上存在点 *P* 满足 $2|\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}|\leqslant|\overrightarrow{F_1F_2}|$，则双曲线 *C* 的离心率的取值范围是（ D ）

A．(1，**错误!未找到引用源。**$\sqrt{2}$]　　B．(1，2]　　C．[**错误!未找到引用源。**$\sqrt{2}$，+∞)　　D．[2，+∞)

【解析】设 O 为坐标原点，由 $2|\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}|\leqslant|\overrightarrow{F_1F_2}|$，得 $4|\overrightarrow{PO}|\leqslant 2c$($2c$ 为双曲线的焦距)，∴ $|\overrightarrow{PO}|\leqslant\frac{1}{2}c$，又由双曲线的性质可得 $|\overrightarrow{PO}|\geqslant a$，于是 $a\leqslant\frac{1}{2}c$，$e\geqslant 2$．故选 D．

第Ⅱ卷（非选择题　共 90 分）

二、填空题

13. 已知 $A=\{(x,y)\,\|\,x|\le 2,|y|\le 2\}$，$B=\left\{(x,y)\middle|y\ge\sqrt{4-x^2}\right\}$，现向集合 *A* 所在区域内投点，则该点落在集合 *B* 所在区域内的概率为____$\frac{4-\pi}{8}$______.

14. 在数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$中，b_n是a_n与a_{n+1}的等差中项，$a_1=3$，且对任意的$n\in N^+$都有$4a_{n+1}-a_n=0$，则$\{b_n\}$的通项公式b_n为__________.

【答案】$\frac{15}{2}\cdot(\frac{1}{4})^n$

【解析】对任意的$n\in N^+$都有$4a_{n+1}-a_n=0$，所以$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{4}$∴$\{a_n\}$是公比为$\frac{1}{4}$的等比数列，∴$a_n=3\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

又b_n是a_n与a_{n+1}的等差中项，所以$b_n=\frac{a_n+a_{n+1}}{2}=\frac{3\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+3\times\left(\frac{1}{4}\right)^n}{2}=\frac{15}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

故答案为$b_n=\frac{15}{2}\cdot(\frac{1}{4})^n$

15.设椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为 F，过点 F 的直线$l$与椭圆 C 相交于 A，B 两点，直线$l$的倾斜角为 60°，$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$. 则椭圆 C 的离心率是 ________.

【解析】设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，由题意知$y_1<0,y_2>0$．直线l的方程为$y=\sqrt{3}(x-c)$，其中

$c=\sqrt{a^2-b^2}$．联立$\begin{cases}y=\sqrt{3}(x-c),\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$得$(3a^2+b^2)y^2+2\sqrt{3}b^2cy-3b^4=0$．

解得$y_1=\frac{-\sqrt{3}b^2(c+2a)}{3a^2+b^2},y_2=\frac{-\sqrt{3}b^2(c-2a)}{3a^2+b^2}$．

因为$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$，所以$-y_1=2y_2$．即$\frac{\sqrt{3}b^2(c+2a)}{3a^2+b^2}=2\cdot\frac{-\sqrt{3}b^2(c-2a)}{3a^2+b^2}$．

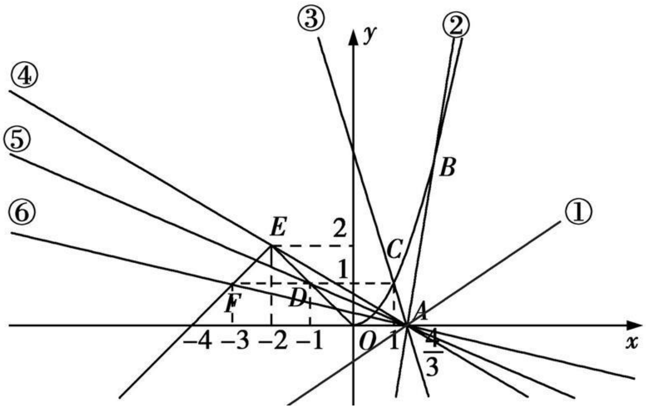
得离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$．

16. 已知函数$f(x)=\begin{cases}2-|x+2|,x\leqslant 0\\ x^2,x>0\end{cases}$ $g(x)=k(x-\frac{4}{3})$ $(k\in\mathbf{R})$．若存在唯一的整数x，使得$\frac{f(x)-g(x)}{x}<0$，则k的取值范围是___________.

【答案】$(-\infty，-3)\cup(-\frac{3}{5}，-\frac{3}{7}]$

【解析】不等式$\frac{f(x)-g(x)}{x}<0$**错误!未找到引用源。**$\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ f(x)<g(x)\end{cases}$或$\begin{cases}x<0\\ f(x)>g(x)\end{cases}$.

作出函数 $f(x)=\begin{cases}2-|x+2|, x\leqslant 0\\ x^2, x>0\end{cases}$ 的大致图象如图所示.



当 k=0 时，x>0， $f(x)<g(x)$ 无整数解，x<0， $f(x)>g(x)$ 不止一个整数解．如①或②所示，

当 k>0，x>0 时，由图象可得 $f(x)<g(x)$ 无整数解或不止一个整数解，x<0 时， $f(x)>g(x)$ 不止一个整数解.

当 k<0 时，若 x>0，如③所示，若直线 $y=k(x-\frac{4}{3})$ 经过点 C(1，1)，

此时 $f(x)<g(x)$ 无整数解，

故当 $k<k_{AC}=-3$ 时，恰有一个整数解 x=1，而此时 x<0， $f(x)>g(x)$ 无解.

如④所示，若直线 $y=k(x-\frac{4}{3})$ 经过点 E(−2，2)时，此时 x>0， $f(x)<g(x)$ 无整数解，x<0，$f(x)>g(x)$ 无整数解.

如⑤所示，若直线 $y=k(x-\frac{4}{3})$ 经过点 D(−1，1)时，此时 x>0， $f(x)<g(x)$ 无整数解，x<0，$f(x)>g(x)$ 有唯一整数解 x=−2，故$-\frac{3}{5}=k_{EA}<k\leqslant k_{DA}=-\frac{3}{7}$.

如⑥所示，若直线 $y=k(x-\frac{4}{3})$ 经过点 F(−3，1)时，此时 x>0， $f(x)<g(x)$ 无整数解，x<0，$f(x)>g(x)$ 有两个整数解 x=−2 和 x=−1，不符合题意.

综上，k 的取值范围为$(-\infty，-3)\cup(-\frac{3}{5}，-\frac{3}{7}]$.

三、解答题

17.（本小题满分 12 分）在 ΔABC 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，向量 $\vec{m}=(a+b,\sin A-\sin C)$，向量 $\vec{n}=(c,\sin A-\sin B)$，且 $\vec{m}/\!/\vec{n}$；

（Ⅰ）求角 B 的大小；

（Ⅱ）设 BC 中点为 D，且 $AD=\sqrt{3}$，求 $a+2c$ 的最大值及此时 ΔABC 的面积。

【解析】（Ⅰ）因为 $\vec{m}//\vec{n}$，故有 $(a+b)(\sin A-\sin B)-c(\sin A-\sin C)=0$，

由正弦定理可得 $(a+b)(a-b)-c(a-c)=0$，即 $a^2+c^2-b^2=ac$.

由余弦定理可知 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{ac}{2ac}=\dfrac{1}{2}$，因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$.（4 分）

（Ⅱ）设 $\angle BAD=\theta$，则在 ΔBAD 中，由 $B=\dfrac{\pi}{3}$ 可知 $\theta\in(0,\dfrac{2\pi}{3})$，、

由正弦定理及 $AD=\sqrt{3}$ 有 $\dfrac{BD}{\sin\theta}=\dfrac{AB}{\sin(\frac{2\pi}{3}-\theta)}=\dfrac{AD}{\sin\frac{\pi}{3}}=2$；

所以 $BD=2\sin\theta, AB=2\sin(\dfrac{2\pi}{3}-\theta)=\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta$，

所以 $a=2BD=4\sin\theta, c=AB=\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta$，

从而 $a+2c=2\sqrt{3}\cos\theta+6\sin\theta=4\sqrt{3}\sin(\theta+\dfrac{\pi}{6})$.由 $\theta\in(0,\dfrac{2\pi}{3})$ 可知 $\theta+\dfrac{\pi}{6}\in(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6})$，

所以当 $\theta+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，即 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 时，$a+2c$ 的最大值为 $4\sqrt{3}$；此时 $a=2\sqrt{3}, c=\sqrt{3}$，

所以 $S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.（12 分）

18.（本小题满分 12 分） 第一届“一带一路”国际合作高峰论坛于 2017 年 5 月 14 日至 15 日在北京举行，这是 2017 年我国重要的主场外交活动，对推动国际和地区合作具有重要意义．某高中政数处为了调查学生对“一带一络”的关注情况，在全校组织了“一带一路知多少”的知识问卷测试，并从中随机抽取了 12 份问卷，得到其测试成绩（百分制），如茎叶图所示．

（Ⅰ）写出该样本的众数、中位数，若该校共有 3000 名学生，试估计该校测试成绩在 70 分以上的人数；

（Ⅱ）从所轴取的 70 分以上的学生中再随机选取 4 人．

记ξ表示测试成绩在 80 分以上的人数，求ξ的分布列和数学期望．

	成绩			
5	2			
6	3	7	8	
7	2	6	6	6
8	2	8		
9	3	4		

解：（Ⅰ）众数为 76，中位数为 76

成绩在 70 分以上的人数估计为 $3000\times\dfrac{8}{12}$=2000（人）（3 分）

（Ⅱ）由题意，ξ=0，1，2，3，4

$P(\xi=0)=P(\xi=4)=\dfrac{C_4^0C_4^4}{C_8^4}=\dfrac{1}{70}$，$P(\xi=1)=P(\xi=3)=\dfrac{C_4^1C_4^3}{C_8^4}=\dfrac{16}{70}$

$P(\xi=2)=\dfrac{C_4^2C_4^2}{C_8^4}=\dfrac{36}{70}$

∴ξ的分布列是

ξ	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{70}$	$\frac{16}{70}$	$\frac{36}{70}$	$\frac{16}{70}$	$\frac{1}{70}$

$E(\xi)=0\times\dfrac{1}{70}+1\times\dfrac{16}{70}+2\times\dfrac{36}{70}+3\times\dfrac{16}{70}+4\times\dfrac{1}{70}=2$（12 分）

19.（本小题满分 12 分）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，且 $\left|F_1F_2\right|=4\sqrt{3}$，点 $A\left(\sqrt{3},-\dfrac{\sqrt{13}}{2}\right)$ 的椭圆上的点.

（Ⅰ）求椭圆的 C 标准的方程；

（Ⅱ）若 T 为椭圆 C 上异于顶点的任意一点，M、N 分别是椭圆 C 的上顶点和右顶点，直线 TM 交 x 轴于 P，直线 TN 交 y 轴于 Q，证明 $|PN|\cdot|QM|$ 为定值.

【解析】（Ⅰ）由已知 $c=2\sqrt{3}$ 且 $F_1\left(-2\sqrt{3},0\right)$，$F_2\left(2\sqrt{3},0\right)$

$\therefore 2a=\left|AF_1\right|+\left|AF_2\right|=\sqrt{\left(\sqrt{3}+2\sqrt{3}\right)^2+\left(-\dfrac{\sqrt{13}}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\sqrt{3}\right)^2+\left(-\dfrac{\sqrt{13}}{2}\right)^2}=\dfrac{11}{2}+\dfrac{5}{2}=8$，

$\therefore a=4$，从而 $b^2=a^2-c^2=4$，故椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$.（4 分）

（Ⅱ）设 $T\left(x_0,y_0\right)$，其中 $x_0\neq 0$，$y_0\neq 0$ 且 $\dfrac{{x_0}^2}{16}+\dfrac{{y_0}^2}{4}=1$，

$\therefore {x_0}^2+4{y_0}^2=16$，$M\left(0,2\right)$，$N\left(4,0\right)$，∴直线 TM 的方程为 $\dfrac{y-2}{y_0-2}=\dfrac{x}{x_0}$，

令 $y=0$ 得 $P\left(\dfrac{-2x_0}{y_0-2},0\right)$，

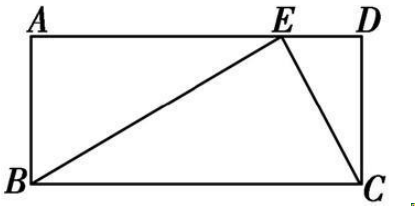
直线 TN 的方程 $\dfrac{y}{y_0}=\dfrac{x-4}{x_0-4}$，令 $x=0$ 得 $Q\left(0,\dfrac{-4y_0}{x_0-4}\right)$，（8 分）

则 $|PN|=\left|4+\dfrac{2x_0}{y_0-2}\right|=\left|\dfrac{2x_0+4y_0-8}{y_0-2}\right|$，$|QM|=\left|2+\dfrac{4y_0}{x_0-4}\right|=\left|\dfrac{2x_0+4y_0-8}{x_0-4}\right|$，

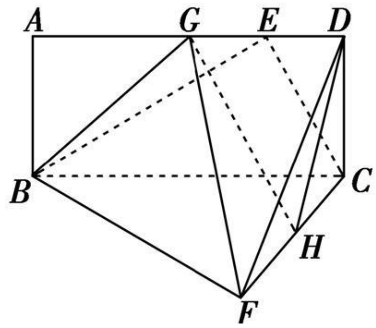
$\therefore |PN|\cdot|QM|=\dfrac{4\left(x_0+2y_0-4\right)^2}{\left(y_0-2\right)\left(x_0-4\right)}=\dfrac{4\left({x_0}^2+4{y_0}^2-8x_0-16y_0+4x_0y_0+16\right)}{x_0y_0-2x_0-4y_0+8}$

$=\dfrac{4\left(4x_0y_0-8x_0-16y_0+32\right)}{x_0y_0-2x_0-4y_0+8}=16$. 即 $|PN|\cdot|QM|$ 恒等于 16 .（12 分）

20.（本小题满分 12 分）已知在如图①所示的矩形 *ABCD* 中，$AB=\sqrt{3}$，*AD*=4，*E* 为 *AD* 上靠近 *D* 的一个四等分点．现将△*BCE* 以 *BC* 为旋转轴旋转到△*BCF*，使平面 *BCF*⊥平面 *ABCD*，设 *G*，*H* 分别为 *AD*，*CF* 的中点，如图②所示．



图①



图②

（Ⅰ）求证：平面 *BGF*⊥平面 *CDF*；

（Ⅱ）求平面 *BGF* 与平面 *DGH* 夹角的余弦值．

【解析】（Ⅰ）在题图①中，∵$AB=\sqrt{3}$，*AD*=4，*E* 为 *AD* 上靠近 *D* 的一个四等分点，

∴*AE*=3，*DE*=1，∴$BE=2\sqrt{3}$，*CE*=2，（2 分）∴ $BC^2=BE^2+CE^2$，得 *BE*⊥*CE*，

∴在题图②中，*BF*⊥*CF*．（3 分）

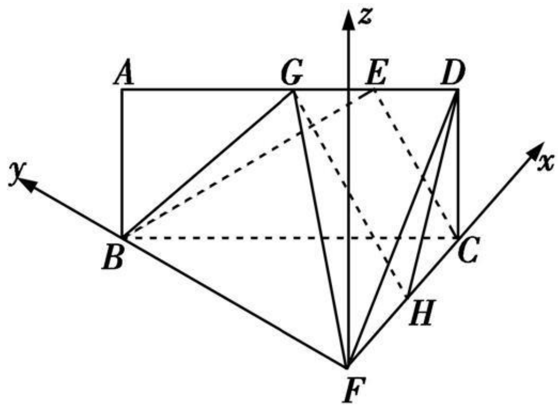
又平面 *BCF*⊥平面 *ABCD*，且平面 *BCF*∩平面 *ABCD*=*BC*，*DC*⊥*BC*，

∴*DC*⊥平面 *BCF*，∴*DC*⊥*BF*．又 *DC*∩*CF*=*C*，∴*BF*⊥平面 *DCF*．

又 *BF*⊂平面 *BGF*，∴平面 *BGF*⊥平面 *CDF*．（5 分）

（Ⅱ）以 *F* 为坐标原点，*FC*，*FB* 所在直线分别为 *x*，*y* 轴，过点 *F* 且垂直于平面 *BCF* 的直线为 *z* 轴建立如图所示的空间直角坐标系，则 *F*(0，0，0)，*B*(0，$2\sqrt{3}$，0)，*G*(1，$\sqrt{3}$，$\sqrt{3}$)，

H(1，0，0)，*D*(2，0，$\sqrt{3}$)，（6 分）



$\therefore \overrightarrow{FB}$=(0，$2\sqrt{3}$，0)，$\overrightarrow{FG}$=(1，$\sqrt{3}$，$\sqrt{3}$)，$\overrightarrow{DG}$=(−1，$\sqrt{3}$，0)，$\overrightarrow{DH}$=(−1，0，$-\sqrt{3}$).

设$\boldsymbol{n}_1$=(x_1，y_1，z_1)为平面 *BFG* 的法向量，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{FB}=0\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{FG}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}2\sqrt{3}y_1=0\\ x_1+\sqrt{3}y_1+\sqrt{3}z_1=0\end{cases}$，

则$y_1=0$，令$z_1=-1$，则$x_1=\sqrt{3}$，∴平面 *BFG* 的一个法向量为$\boldsymbol{n}_1$=($\sqrt{3}$，0，−1).（7 分）

设$\boldsymbol{n}_2$=(x_2，y_2，z_2)为平面 *DGH* 的法向量，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{DG}=0\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{DH}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}-x_2+\sqrt{3}y_2=0\\ -x_2-\sqrt{3}z_2=0\end{cases}$，

令$x_2=\sqrt{3}$，则y_2=1，z_2=−1，∴平面 *DGH* 的一个法向量为$\boldsymbol{n}_2$=($\sqrt{3}$，1，−1).（9 分）

设 θ 为平面 *BFG* 与平面 *DGH* 的夹角，

则$\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{|\sqrt{3}\times\sqrt{3}+0\times1+(-1)\times(-1)|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+0^2+(-1)^2}\times\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2+(-1)^2}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.（12 分）

21.（本小题满分 12 分）已知$f(x)=e^x-ax^2$，曲线$y=f(x)$在$(1,f(1))$处的切线方程为$y=bx+1$.

（1）求a,b的值；

（2）求$f(x)$在$[0,1]$上的最大值；

（3）证明：当$x>0$时，$e^x+(1-e)x-a\ln x-1\geq 0$.

【解析】（1）$f'(x)=e^x-2ax$，由题设得$f'(1)=e-2a=b$，$f(1)=e-a=b+1$，解得

$a=1,b=e-2$.（2 分）

（2）由（1）知$f(x)=e^x-x^2$，∴$f'(x)=e^x-2x$，$f''(x)=e^x-2$，∴$f'(x)$在$(0,\ln 2)$上单调递减，在$(\ln 2,+\infty)$上单调递增，所以$f'(x)\geq f'(\ln 2)=2-2\ln 2>0$，

所以$f(x)$在$[0,1]$上单调递增，所以$f(x)_{\max}=f(1)=e-1$.（6 分）

（3）由（2）知 $f(x)$ 过点 $(1,e-1)$，且 $y=f(x)$ 的图像在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=(e-2)x+1$，

故可猜测：当 $x>0,x\neq1$ 时，$f(x)$ 的图象恒在切线 $y=(e-2)x+1$ 的上方.

下证：当 $x>0$ 时，$f(x)\geq(e-2)x+1$

设 $g(x)=f(x)-(e-2)x+1,x>0$，则 $g'(x)=e^x-2x-(e-2),g''(x)=e^x-2$，

由（2）知，$g'(x)$ 在 $(0,\ln2)$ 上单调递减，在 $(\ln2,+\infty)$ 上单调递增，

又 $g'(x)=3-e>0,g'(1)=0,0<\ln2<1$，$\therefore g'(\ln2)<0$，

所以，存在 $x_0\in(0,1)$，使得 $g'(x)=0$，

所以，当 $x\in(0,x_0)\cup(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$；当 $x\in(x_0,1)$ 时，$g'(x)<0$，故 $g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

又 $g(0)=g(1)=0$，$\therefore g(x)=e^x-x^2-(e-2)x-1\geq0$，当且仅当 $x=1$ 时取等号，

故 $\dfrac{e^x+(2-e)x-1}{x}\geq x,x>0$.

由（2）知，$\dfrac{e^x+(2-e)x-1}{x}\geq x\geq\ln x+1$，即 $\dfrac{e^x+(2-e)x-1}{x}\geq\ln x+1$，

所以 $e^x+(2-e)x-1\geq x\ln x+x$，

即 $e^x+(1-e)x-1-x\ln x\geq0$ 成立，当 $x=1$ 时，等号成立（12 分）

选考部分:共 10 分。请考生在 22、23 两题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22.（本小题满分 10 分）选修 4-4：坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中，曲线 M 的参数方程为 $\begin{cases}x=\sin\theta+\cos\theta\\y=\sin2\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数），若以该直角坐标系的原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 N 的极坐标方程为: $\rho\sin(\theta+\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{\sqrt2}{2}t$（其中 t 为常数）.

（Ⅰ）若曲线 N 与曲线 M 只有一个公共点，求 t 的取值范围;

（Ⅱ）当 $t=-2$ 时，求曲线 M 上的点与曲线 N 上点的最小距离.

【解析】（Ⅰ）曲线 M 的普通方程是 $y=x^2-1(-\sqrt2\leq x\leq\sqrt2)$

曲线 N 的直角坐标方程是 $x+y-t=0$

联立方程得$x^2+x-t-1=0$

由题意，方程$x^2+x-t-1=0$在$\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$上仅有一解

解之得$t\in\left\{-\frac{5}{4}\right\}\cup\left[1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}\right]$（5 分）

（Ⅱ）当$t=-2$时，曲线N的直角坐标方程是$x+y+2=0$，

设$P(x,y)$是曲线M上任意一点，它到曲线N的距离是$d=\frac{|x+y+2|}{\sqrt{2}}=\frac{|x^2+x+1|}{\sqrt{2}}$

$\because -\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$ $\therefore \frac{3}{4}\le x^2+x+1\le 3+\sqrt{2}$ $\therefore$ $d_{\min}=\frac{3\sqrt{2}}{8}$（10 分）

23.（本小题满分 10 分）（选修 4-5：不等式选讲）

已知函数$f(x)=|x|+|x-1|$.

（Ⅰ）解不等式$f(x)\ge 3$；

（Ⅱ）若$f(x)+f(y)\le 2$，求$x+y$的取值范围.

【解析】（Ⅰ）ⅰ）当$x\le 0$时，原不等式化为$-x+1-x\ge 3$

解之得$x\le -1$，结合$x\le 0$，此时$x\le -1$

ⅱ）当$0<x\le 1$时，原不等式化为$x+1-x\ge 3$，无解

ⅲ）当$x>1$时，原不等式化为$x+x-1\ge 3$

解之得$x\ge 2$，结合$x>1$，此时$x\ge 2$

综上：原不等式的解集为$(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$（5 分）

（Ⅱ）$f(x)+f(y)\le 2$即$|x|+|x-1|+|y|+|y-1|\le 2$

又$|x|+|x-1|\ge|x-(x-1)|=1,|y|+|y-1|\ge|y-(y-1)|=1$，$\therefore$ $|x|+|x-1|+|y|+|y-1|\ge 2$

$\therefore |x|+|x-1|+|y|+|y-1|=2$且$|x|+|x-1|=|y|+|y-1|=1\Leftrightarrow 0\le x\le 1,0\le y\le 1$

$\therefore 0\le x+y\le 2$（10 分）