数学（供文科考生使用）试题参考答案和评分参考

评分说明：

1．本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分参考制订相应的评分细则．

2．对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分．

3．解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数．

4．只给整数分数．选择题不给中间分．

一．选择题。

（1）（A）　（2）（A）　（3）（C）　（4）（D）　（5）（B）　（6）（A）

（7）（C）　（8）（C）　（9）（B）　（10）（B）　（11）（D）　（12）（B）

二．填空题。

（13）2　（14）②③④⑤　（15）$\{a\,|\,-9<a\le 0\}$　（16）1

三．解答题。

（18）**解：**

从数字$1,2,3,4,5,6$中随机抽取2个数字，基本事件为：

$\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{1,6\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\},\{2,6\},$

$\{3,4\},\{3,5\},\{3,6\},\{4,5\},\{4,6\},\{5,6\}$，

共15个.而且这些基本事件的出现是等可能的.

（Ⅰ）用A表示“较大的数大于等于4”这一事件. 则A包含的基本事件有

$\{1,4\},\{1,5\},\{1,6\},\{2,4\},\{2,5\},\{2,6\},\{3,4\},\{3,5\},\{3,6\},\{4,5\},\{4,6\},\{5,6\}$，

共12个.

所以$P(A)=\dfrac{12}{15}=\dfrac{4}{5}$.　　……8分

（Ⅱ）用B表示“较小的数小于等于3”这一事件. 则B包含的基本事件有

$\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{1,6\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\},\{2,6\},\{3,4\},\{3,5\},\{3,6\}$，

共12个.

所以$P(B)=\dfrac{12}{15}=\dfrac{4}{5}$.　　……12分

（18）**解：**

（Ⅰ）因为$a+c=2b$，由正弦定理得$\sin A+\sin C=2\sin B$

又因为$A=2C$且$A+B+C=\pi$，

所以$\sin 2C+\sin C=2\sin(\pi-3C)$.

整理得$8\cos^2 C-2\cos C-3=0$.

解得$\cos C=\dfrac{3}{4}$或$\cos C=-\dfrac{1}{2}$（舍）.

故$\cos C=\dfrac{3}{4}$.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　……6 分

（Ⅱ）因为$\cos C=\dfrac{3}{4}$，所以$\sin C=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

所以$\sin A=\sin 2C=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$，$\cos A=\cos 2C=\dfrac{1}{8}$；

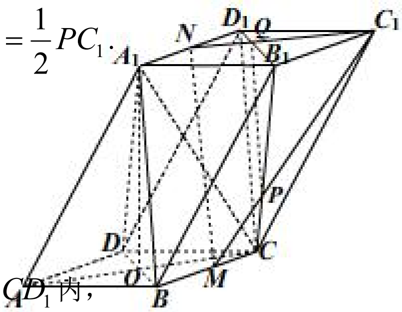
$\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\dfrac{5\sqrt{7}}{16}$.

由正弦定理得$b=5$，$a=6$.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　……12 分

（19）**证明**:

（Ⅰ）连结MC_1,NC_1分别交B_1C,B_1D_1于点P,Q，连结PQ.

因为$MN\,//\,B_1C_1$，且$MN=\dfrac{1}{2}B_1C_1$，所以$MP=\dfrac{1}{2}PC_1$.



同理，$NQ=\dfrac{1}{2}QC_1$.

所以$MN\,//\,PQ$.

又因为MN不在平面B_1CD_1内，PQ在平面B_1CD_1内，

所以$MN\,//$平面B_1CD_1.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　……4 分

（Ⅱ）连结BD，交AC于点O，连结A_1O,A_1B,A_1D,A_1C.

因为$A_1A=A_1A$，$\angle A_1AB=\angle A_1AD$，$AB=AD$，

所以$\triangle A_1AB\cong\triangle A_1AD$，故$A_1B=A_1D$.

又因为$OB=OD$，所以$A_1O\perp BD$.

在$\triangle A_1AC$中，$AA_1=AC=2\sqrt{3}$，$\angle A_1AC=60^\circ$，所以$A_1A=A_1C$.

又因为$OA=OC$，所以$A_1O\perp AC$.

从而$A_1O\perp$平面$ABCD$.

故平行六面体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的体积$V=S_{ABCD}\cdot A_1O=6\sqrt{3}$.　　……12 分

（20）**解：**

（Ⅰ）依题意有$\begin{cases} a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}c, \\ \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{\frac{9}{4}}{b^2}=1 \end{cases}$，又因为$a^2=b^2+c^2$，所以得$\begin{cases} a^2=2, \\ b^2=1. \end{cases}$

故椭圆C的方程为$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$.　　　　……2 分

（Ⅱ）依题意，点A,C满足$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2}+y^2=1, \\ y=k_1x+m_1, \end{cases}$

所以x_A,x_C是方程$(2k_1{}^2+1)x^2+4k_1m_1x+2m_1{}^2-2=0$的两个根.

得$\begin{cases} \Delta=8\cdot(2k_1{}^2+1-m_1{}^2)>0, \\ x_A+x_C=-\dfrac{4k_1m_1}{2k_1{}^2+1}. \end{cases}$

所以线段AC的中点为$(-\dfrac{2k_1m_1}{2k_1{}^2+1},\dfrac{m_1}{2k_1{}^2+1})$.

同理，所以线段BD的中点为$(-\dfrac{2k_2m_2}{2k_2{}^2+1},\dfrac{m_2}{2k_2{}^2+1})$.

因为四边形$ABCD$是平行四边形，所以$\begin{cases} -\dfrac{2k_1m_1}{2k_1{}^2+1}=-\dfrac{2k_2m_2}{2k_2{}^2+1}, \\ \dfrac{m_1}{2k_1{}^2+1}=\dfrac{m_2}{2k_2{}^2+1}. \end{cases}$

解得，$m_1=m_2=0$或$k_1=k_2$（舍）.

即平行四边形$ABCD$的对角线AC和BD相交于原点O.　　　　……6 分

（Ⅲ）点A,C满足$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2}+y^2=1, \\ y=k_1x, \end{cases}$

所以x_A,x_C是方程$(2k_1{}^2+1)x^2-2=0$的两个根，即$x_A{}^2=x_C{}^2=\dfrac{2}{2k_1{}^2+1}$

故$|OA|=|OC|=\sqrt{1+k_1{}^2}\cdot\sqrt{\dfrac{2}{2k_1{}^2+1}}$.

同理，$|OB|=|OD|=\sqrt{1+k_2{}^2}\cdot\sqrt{\dfrac{2}{2k_2{}^2+1}}$.

又因为$AC\perp BD$，所以$|OB|=|OD|=\sqrt{1+(\dfrac{1}{k_1})^2}\cdot\sqrt{\dfrac{2}{2(\dfrac{1}{k_1})^2+1}}$，其中$k_1\neq0$.

从而菱形$ABCD$的面积S为

$$S=2|OA|\cdot|OB|=2\sqrt{1+k_1^{2}}\cdot\sqrt{\frac{2}{2k_1^{2}+1}}\cdot\sqrt{1+(\frac{1}{k_1})^2}\cdot\sqrt{\frac{2}{2(\frac{1}{k_1})^2+1}},$$

整理得 $S=4\sqrt{\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{(k_1+\dfrac{1}{k_1})^2}}}$，其中 $k_1\neq 0$.

故，当 $k_1=1$ 或 -1 时，菱形 $ABCD$ 的面积最小，该最小值为 $\dfrac{8}{3}$. ……12 分

（21）**解：**

（Ⅰ）由题意得 $f'(x)=\dfrac{(2x-1)\ln(2x-1)-2x\ln x}{x(2x-1)[\ln(2x-1)]^2}$，其中 $x\in(1,+\infty)$.

设函数 $h(x)=(2x-1)\ln(2x-1)-2x\ln x$，其中 $x\in[1,+\infty)$.

因为 $h'(x)=2\ln(2-\dfrac{1}{x})>0$，其中 $x\in(1,+\infty)$，

所以 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是单调增函数，

从而当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h(x)>h(0)=0$.

即当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$.

故，函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是单调增函数. ……6 分

（Ⅱ）设 $x_2>x_1>0$，则 $a^{x_2}>a^{x_1}>1$，所以 $\dfrac{a^{x_2}+1}{2}>\dfrac{a^{x_1}+1}{2}>1$.

由（Ⅰ）得，$f(\dfrac{a^{x_2}+1}{2})>f(\dfrac{a^{x_1}+1}{2})$，即 $g(x_2)>g(x_1)$.

故函数在 $(0,+\infty)$ 上是单调增函数.

函数 $g(x)$ 的解析式为 $g(x)=\dfrac{1}{x\ln a}\ln(\dfrac{a^x+1}{2})$. ……8 分

（Ⅲ）当 $\alpha=\beta$（$\alpha,\beta\in\mathbf{R}^+$）时，$\sqrt[n]{\dfrac{\alpha^n+\beta^n}{2}}=\sqrt[n+1]{\dfrac{\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}}{2}}$，其中 $n\in\mathbf{N}^*$.

当 $\alpha\neq\beta$（$\alpha,\beta\in\mathbf{R}^+$）时，不妨设 $\alpha>\beta$.

由（Ⅱ）得，函数 $g(x)=\dfrac{1}{x}\ln(\dfrac{a^x+1}{2})$（其中 $a>1$）在 $(0,+\infty)$ 上是单调增函数；

所以 $\dfrac{1}{n}\ln(\dfrac{(\frac{\alpha}{\beta})^n+1}{2})<\dfrac{1}{n+1}\ln(\dfrac{(\frac{\alpha}{\beta})^{n+1}+1}{2})$，其中 $\dfrac{\alpha}{\beta}>1$，$n\in\mathbf{N}^*$.

从而 $\sqrt[n]{\dfrac{(\frac{\alpha}{\beta})^n+1}{2}}<\sqrt[n+1]{\dfrac{(\frac{\alpha}{\beta})^{n+1}+1}{2}}$，其中 $\dfrac{\alpha}{\beta}>1$，$n\in\mathbf{N}^*$.

故 $\sqrt[n]{\dfrac{\alpha^n+\beta^n}{2}}<\sqrt[n+1]{\dfrac{\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}}{2}}$，其中 $\alpha>\beta$，$n\in\mathbf{N}^*$.

综上，不等式 $\sqrt[n]{\dfrac{\alpha^n+\beta^n}{2}}\leq\sqrt[n+1]{\dfrac{\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}}{2}}$（其中 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}^+$，$n\in\mathbf{N}^*$）成立.

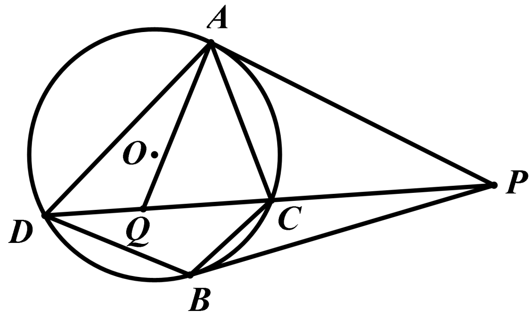
……12 分

（22）（本小题满分 10 分）选修 4-1:几何证明选讲

如图，PA,PB 是圆 O 的两条切线，A,B 是切点，C 是劣弧 AB (不包括端点)上一点，直线 PC 交圆 O 于另一点 D，Q 在弦 CD 上，且 $\angle DAQ=\angle PBC$．求证：

（Ⅰ）$\dfrac{BD}{AD}=\dfrac{BC}{AC}$；

（Ⅱ）$\triangle ADQ \backsim \triangle DBQ$．



（22）**证明：**

（Ⅰ）连结 AB．因为$\triangle PBC \backsim \triangle PDB$，所以 $\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{PD}{PB}$．

同理 $\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{PD}{PA}$．

又因为 $PA=PB$，所以 $\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{AD}{AC}$，即 $\dfrac{BD}{AD}=\dfrac{BC}{AC}$．　　……5 分

（Ⅱ）因为 $\angle BAC=\angle PBC=\angle DAQ$，$\angle ABC=\angle ADQ$，

所以$\triangle ABC \backsim \triangle ADQ$，即 $\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{DQ}{AQ}$．

故 $\dfrac{BD}{AD}=\dfrac{DQ}{AQ}$．

又因为 $\angle DAQ=\angle PBC=\angle BDQ$，

所以$\triangle ADQ \backsim \triangle DBQ$．　　……10 分

（23）**解：**

（Ⅰ）由题意知：$\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta, \end{cases}$ 和 $\begin{cases} m=\rho\cos(\theta+\theta_0), \\ n=\rho\sin(\theta+\theta_0). \end{cases}$

即 $\begin{cases} m=\rho\cos\theta\cos\theta_0-\rho\sin\theta\sin\theta_0, \\ n=\rho\sin\theta\cos\theta_0+\rho\cos\theta\sin\theta_0, \end{cases}$

所以$\begin{cases} m = x\cos\theta_0 - y\sin\theta_0, \\ n = x\sin\theta_0 + y\cos\theta_0. \end{cases}$ ……4 分

（Ⅱ）由题意知$\begin{cases} m = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}y, \\ n = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{1}{2}y, \end{cases}$

所以$\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{1}{2}y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}y) + \dfrac{1}{\dfrac{1}{2}x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}y}$.

整理得$\dfrac{x^2}{2\sqrt{3}} - \dfrac{y^2}{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}} = 1$.

该方程所表示的曲线是双曲线. ……10 分

（Ⅱ）由题意知$\begin{cases} m = x\cos\dfrac{3\pi}{8} - y\sin\dfrac{3\pi}{8}, \\ n = x\sin\dfrac{3\pi}{8} + y\cos\dfrac{3\pi}{8}, \end{cases}$

所以$x\sin\dfrac{3\pi}{8} + y\cos\dfrac{3\pi}{8} = x\cos\dfrac{3\pi}{8} - y\sin\dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{1}{x\cos\dfrac{3\pi}{8} - y\sin\dfrac{3\pi}{8}}$.

整理得$\sqrt{2}\sin^2\dfrac{\pi}{8}\cdot x^2 - \sqrt{2}\cos^2\dfrac{\pi}{8}\cdot y^2 = 1$, 即$\dfrac{x^2}{2\sqrt{2}+2} - \dfrac{y^2}{2\sqrt{2}-2} = 1$.

该方程所表示的曲线是双曲线. ……10 分

（24）**解：**

（Ⅰ）设$g(x) = f(x) - |x-4|$. 所以$g(x) = \begin{cases} -x-4, & (x \le -3), \\ x+2, & (-3 < x \le -1), \\ 3x+4, & (-1 < x \le 4), \\ x+12, & (x > 4). \end{cases}$

解得：$-4 < x < -2$，即不等式$f(x) < |x-4|$的解集是$\{x \mid -4 < x < -2\}$.

……5 分

（Ⅱ）由绝对值三角不等式得：

$|x+a| + |x+1| + |a+1| \ge |x+a-(x+1)| + |a+1| = |a-1| + |a+1|$,

当且仅当$(x+a)(x+1) \le 0$时，等号成立；

$|a-1| + |a+1| \ge 2$，当且仅当$(a-1)(a+1) \le 0$时，等号成立.

所以$f(x)\geq 2$，当且仅当$-1\leq x\leq -a\leq 1$时，等号成立.　　　　　　……10 分