2016-2017 学年度第一学期高中教学质量检测

高三数学试卷

本试卷共有 20 道试题，满分 150 分．考试时间 120 分钟．

一、填空题（50 分）本大题共有 10 题，要求在答题纸相应题序的空格内直接填写结果，每个空格填对得 5 分，否则一律得零分.

1．“$x<0$”是“$x<a$”的充分非必要条件，则a的取值范围是________.

2．函数$f(x)=1-3\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$的最小正周期为________.

3．若复数z为纯虚数， 且满足$(2-\mathrm{i})z=a+\mathrm{i}$（$\mathrm{i}$为虚数单位），则实数$a$的值为______.

4．二项式$\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^5$的展开式中，$x$的系数为________.

5．用半径 1 米的半圆形薄铁皮制作圆锥型无盖容器，其容积为________立方米.

6．已知α为锐角，且$\cos(\alpha+\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{3}{5}$，则$\sin\alpha=$________ .

7．根据相关规定，机动车驾驶人血液中的酒精含量大于（等于）20 毫克/100 毫升的行为属于饮酒驾车. 假设饮酒后，血液中的酒精含量为p_0毫克/100 毫升，经过 x 个小时，酒精含量降为p毫克/100 毫升，且满足关系式$p=p_0\cdot e^{rx}$（r 为常数）.

若某人饮酒后血液中的酒精含量为 89 毫克/100 毫升，2 小时后，测得其血液中酒精含量降为 61 毫克/100 毫升，则此人饮酒后需经过________小时方可驾车. (精确到小时)

8．已知奇函数$f(x)$是定义在R上的增函数，数列$\{x_n\}$是一个公差为2的等差数列，满足$f(x_7)+f(x_8)=0$，则x_{2017}的值为________.

9．直角三角形ABC中，$AB=3$，$AC=4$，$BC=5$，点M是三角形ABC外接圆上任意一点，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}$的最大值为________.

10．已知$f(x)=a^x-b$ $(a>0$ 且 $a\neq1$，$b\in\mathrm{R})$，$g(x)=x+1$，若对任意实数x均有$f(x)\cdot g(x)\le0$，则$\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}$的最小值为________.

二、选择题（25 分）本大题共有 5 题，每题都给出四个结论，其中有且只有一个结论是正确的，必须把答题纸上相应题序内的正确结论代号涂黑，选对得 5 分，否则一律得零分.

11．若空间三条直线 a、b、c 满足$a\perp b, b\perp c$，则直线 a 与 c 【　　】

A．一定平行；　　　　B．一定相交；

C．一定是异面直线；　　　　　　　D．平行、相交、是异面直线都有可能．

12．在无穷等比数列$\{a_n\}$中，$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=\dfrac{1}{2}$，则$a_1$的取值范围是【　　】

A．$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$；　　　　　　B．$\left(\dfrac{1}{2},1\right)$；

C．$(0,1)$；　　　　　　D．$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},1\right)$．

13．某班班会准备从含甲、乙的 6 名学生中选取 4 人发言，要求甲、乙两人至少有一人参加，那么不同的发言顺序有　　　　　　　　　　　　　　　　【　　】

A．336 种；　　B．320 种；　　C．192 种；　　D．144 种．

14．已知椭圆C_1，抛物线C_2焦点均在x轴上，C_1的中心和C_2顶点均为原点O，从每条曲线上各取两个点，将其坐标记录于表中，则C_1的左焦点到C_2的准线之间的距离为　　　【　　】

x	3	-2	4	$\sqrt{2}$
y	$-2\sqrt{3}$	0	-4	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

A．$\sqrt{2}-1$；　　　　　　B．$\sqrt{3}-1$；

C．1；　　　　　　D．2．

15．已知$y=g(x)$与$y=h(x)$都是定义在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上的奇函数，且当$x>0$时，$g(x)=\begin{cases}x^2,\ 0<x\le 1,\\ g(x-1),\quad x>1.\end{cases}$，$h(x)=k\log_2 x$（$x>0$），若$y=g(x)-h(x)$恰有 4 个零点，则正实数$k$的取值范围是　　　　　　　　　　　【　　】

A．$[\dfrac{1}{2},1]$；　　　　　　B．$(\dfrac{1}{2},1]$；

C．$(\dfrac{1}{2},\log_3 2]$；　　　　　　D．$[\dfrac{1}{2},\log_3 2]$．

三、解答题（本题满分 75 分）本大题共有 5 题，解答下列各题必须在答题纸的规定区域（对应的题号）内写出必要的步骤．

16．（本题满分 11 分，第 1 小题 6 分，第 2 小题 5 分）

已知正四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$，$AB=a,AA_1=2a$，E,F分别是棱AD,CD的中点．

(1) 求异面直线BC_1与EF所成角的大小；

(2) 求四面体CA_1EF的体积．

17.（本题满分 14 分，第 1 小题 7 分，第 2 小题 7 分）

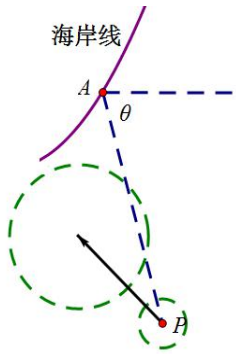
设双曲线C：$\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{3}=1$， F_1,F_2为其左右两个焦点.

(1) 设O为坐标原点，M 为双曲线C右支上任意一点，求$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{F_1M}$ 的取值范围；

(2) 若动点P与双曲线C的两个焦点F_1,F_2的距离之和为定值，且$\cos\angle F_1PF_2$的最小值为$-\dfrac{1}{9}$，求动点P的轨迹方程.

18.（本题满分 14 分，第 1 小题 7 分，第 2 小题 7 分）

在某海滨城市附近海面有一台风，据监测，当前台风中心位于城市 A（看做一点）的东偏南θ角方向$\left(\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{10}\right)$，300 km 的海面 P 处，并以 20km / h 的速度向西偏北 45° 方向移动．台风侵袭的范围为圆形区域，当前半径为 60 km，并以 10km / h 的速度不断增大.



(1) 问 10 小时后，该台风是否开始侵袭城市 A，并说明理由；

(2) 城市 A 受到该台风侵袭的持续时间为多久？

19.（本题满分 18 分，第 1 小题 4 分，第 2 小题 6 分，第 3 小题 8 分）

设集合$M_a=\{f(x)\,|$存在正实数a，使得定义域内任意x都有$f(x+a)>f(x)\}$.

(1) 若$f(x)=2^x-x^2$，试判断$f(x)$是否为M_1中的元素，并说明理由；

(2) 若$g(x)=x^3-\dfrac{1}{4}x+3$，且$g(x)\in M_a$，求a的取值范围；

(3) 若 $h(x)=\log_3(x+\frac{k}{x}),\ x\in[1,+\infty)$（$k\in \mathrm{R}$），且 $h(x)\in M_2$，求 $h(x)$ 的最小值．

20．（本题满分 18 分，第 1 小题 4 分，第 2 小题 7 分，第 3 小题 7 分）

由 $n(n\ge 2)$ 个不同的数构成的数列 $a_1,a_2,\cdots a_n$ 中，若 $1\le i<j\le n$ 时，$a_j<a_i$（即后面的项 a_j 小于前面项 a_i），则称 a_i 与 a_j 构成一个逆序，一个有穷数列的全部逆序的总数称为该数列的逆序数．如对于数列 3，2，1，由于在第一项 3 后面比 3 小的项有 2 个，在第二项 2 后面比 2 小的项有 1 个，在第三项 1 后面比 1 小的项没有，因此，数列 3，2，1 的逆序数为 $2+1+0=3$；同理，等比数列 $1,-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{8}$ 的逆序数为 4．

(1) 计算数列 $a_n=-2n+19(1\le n\le 100,n\in \mathrm{N}^*)$ 的逆序数；

(2) 计算数列 $a_n=\begin{cases}\left(\frac{1}{3}\right)^n,n为奇数\\ -\frac{n}{n+1},n为偶数\end{cases}$（$1\le n\le k,n\in \mathrm{N}^*$）的逆序数；

(3) 已知数列 $a_1,a_2,\cdots a_n$ 的逆序数为 a，求 $a_n,a_{n-1},\cdots a_1$ 的逆序数．

静安区 2016-2017 学年度第一学期高中教学质量检测

高三数学试卷答案与评分标准

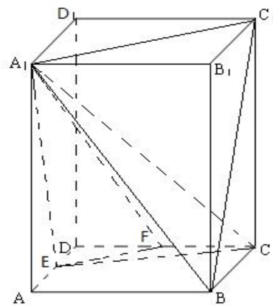
一、

1. $(0,+\infty)$；　2. π；　3. $\frac{1}{2}$；　4. 10；　5. $\frac{\sqrt{3}\pi}{24}$；

6. $\frac{\sqrt{2}}{10}$；　7. 8;　8. 4019;　9. 12;　10. 4

二、

11. D;　12. D;　13. A;　14.B;　15.C.



16．解：（1）连接 A_1C_1，......................................1 分

则 $\angle A_1C_1B$ 为异面直线 BC_1与EF 所成角　…………….1 分

在 ΔA_1C_1B 中，可求得 $C_1B=A_1B=\sqrt{5}a$，$A_1C_1=\sqrt{2}a$

$\cos\angle A_1C_1B=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\sqrt{5}a}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　$\therefore$异面直线所成角的大小$\arccos\dfrac{\sqrt{10}}{10}$……………………..4 分

（2）$V_{C-A_1EF}=V_{A_1-EFC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot 2a=\frac{a^3}{12}$　………………………………..5 分

17.（1）设 $M\left(x,y\right)$，$x\ge\sqrt{2}$，左焦点 $F_1(-\sqrt{5},0)$，

$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{F_1M}=(x,y)\cdot(x+\sqrt{5},y)$

$=x^2+\sqrt{5}x+y^2=x^2+\sqrt{5}x+\dfrac{3x^2}{2}-3$ ……………………………4 分

$=\frac{5}{2}x^2+\sqrt{5}x-3$ （$x\geq\sqrt{2}$）对称轴 $x=-\frac{\sqrt{5}}{5}\leq\sqrt{2}$

$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{F_1M}\in\left[2+\sqrt{10},+\infty\right)$ ……………………………3 分

（2）由椭圆定义得：P 点轨迹为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，$|F_1F_2|=2\sqrt{5}$，$|PF_1|+|PF_2|=2a$

$$\cos\angle F_1PF_2=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-20}{2|PF_1|\cdot|PF_2|}=\frac{4a^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|-20}{2|PF_1|\cdot|PF_2|}$$

$$=\frac{4a^2-20}{2|PF_1|\cdot|PF_2|}-1$$ ……………………………4 分

由基本不等式得 $2a=|PF_1|+|PF_2|\geq2\sqrt{|PF_1|\cdot|PF_2|}$，

当且仅当 $|PF_1|=|PF_2|$ 时等号成立

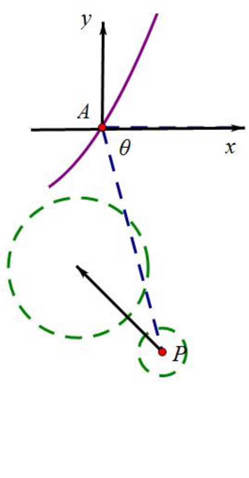
$|PF_1|\cdot|PF_2|\leq a^2\Rightarrow\cos\angle F_1PF_2\geq\frac{4a^2-20}{2a^2}-1=-\frac{1}{9}\Rightarrow a^2=9$，$b^2=4$

所求动点 P 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ ……………………………3 分

18．解：（1）如图建立直角坐标系， ……………………………1 分

则城市 $A(0,0)$，当前台风中心 $P\left(30\sqrt{2},-210\sqrt{2}\right)$，

设 t 小时后台风中心 P 的坐标为 (x,y)，则 $\begin{cases}x=30\sqrt{2}-10\sqrt{2}t\\y=-210\sqrt{2}+10\sqrt{2}t\end{cases}$，此时台风的半径为 $60+10t$，



10 小时后，$|PA|\approx184.4$ km，台风的半径为 $r=160$km,

$\because r<|PA|$， ……………………………5 分

故，10 小时后，该台风还没有开始侵袭城市 A. ………1 分

（2）因此，t 小时后台风侵袭的范围可视为以

$P\left(30\sqrt{2}-10\sqrt{2}t,-210\sqrt{2}+10\sqrt{2}t\right)$ 为圆心，$60+10t$ 为半径的圆，

若城市 A 受到台风侵袭，则

$$\sqrt{\left[\left(30\sqrt{2}-10\sqrt{2}t\right)-0\right]^2+\left[\left(-210\sqrt{2}+10\sqrt{2}t\right)-0\right]^2}\leq(60+10t)$$

$\Rightarrow300t^2-10800t+86400\leq0$，即 $t^2-36t+288\leq0$， ……………………………5 分

解得 $12\leq t\leq24$ ……………………………1 分

答：该城市受台风侵袭的持续时间为 12 小时． ……………………………1 分

19．解：（1）$\because f(1)=f(0)=1$，　$\therefore f(x)\notin M_1$．　..................................4 分

（2）由 $g(x+a)-g(x)=(x+a)^3-x^3-\dfrac{1}{4}(x+a)+\dfrac{1}{4}x=3ax^2+3a^2x+a^3-\dfrac{1}{4}a>0$ ...2 分

$\therefore \Delta=9a^4-12a(a^3-\dfrac{1}{4}a)<0$，　..................................3 分

故 $a>1$．　..................................1 分

（3）由 $h(x+2)-h(x)=\log_3[(x+2)+\dfrac{k}{x+2}]-\log_3(x+\dfrac{k}{x})>0$，　..................1 分

即：$\log_3[(x+2)+\dfrac{k}{x+2}]>\log_3(x+\dfrac{k}{x})$

$\therefore\ x+2+\dfrac{k}{x+2}>x+\dfrac{k}{x}>0$ 对任意 $x\in[1,+\infty)$ 都成立

$\therefore\ \begin{cases}k<x(x+2)\\k>-x^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k<3\\k>-1\end{cases}\Rightarrow -1<k<3$　..................................3 分

当 $-1<k\le 0$ 时，$h(x)_{\min}=h(1)=\log_3(1+k)$；　..................................1 分

当 $0<k<1$ 时，$h(x)_{\min}=h(1)=\log_3(1+k)$；　..................................1 分

当 $1\le k<3$ 时，$h(x)_{\min}=h(\sqrt{k})=\log_3(2\sqrt{k})$．　..................................1 分

综上：$h(x)_{\min}=\begin{cases}\log_3(1+k), & -1<k<1,\\ \log_3(2\sqrt{k}), & 1\le k<3.\end{cases}$　..................................1 分

20．（1）因为 $\{a_n\}$ 为单调递减数列，所以逆序数为

$99+98+\cdots+1=\dfrac{(99+1)\times 99}{2}=4950$；　..................................4 分

（2）当 n 为奇数时，$a_1>a_3>\cdots>a_{2n-1}>0$．..................................1 分

当 n 为偶数时，

$$a_n-a_{n-2}=-\frac{n}{n+1}+\frac{n-2}{n-1}(n\ge 4)$$
$$=\frac{-2}{n^2-1}$$
$$=\frac{-2}{(n+1)(n-1)}<0$$

所以 $0>a_2>a_4>\cdots>a_{2n}$．　..................................2 分

当 k 为奇数时，逆序数为

$$(k-1)+(k-3)+\cdots+2+\frac{k-3}{2}+\frac{k-5}{2}+\cdots+1=\frac{3k^2-4k+1}{8}$$ ....2 分

当 k 为偶数时，逆序数为

$$(k-1)+(k-3)+\cdots+1+\frac{k-2}{2}+\frac{k-4}{2}+\cdots+1=\frac{3k^2-2k}{8}$$ ....2 分

（3）在数列 $a_1,a_2,\cdots a_n$ 中，若 a_1 与后面 $n-1$ 个数构成 p_1 个逆序对，

则有 $(n-1)-p_1$ 不构成逆序对，所以在数列 $a_n,a_{n-1},\cdots a_1$ 中，

逆序数为 $(n-1)-p_1+(n-2)-p_2+\cdots+(n-n)-p_n=\frac{n(n-1)}{2}-a$ ． ...7 分