

2016-2017 学年高二（上）期中数学试卷（理科）

一、选择题：（本题包括 12 小题，共 60 分，每小题只有一个选项符合题意）

1. 已知实数 x, y 满足 $a^x < a^y$ ($0 < a < 1$)，则下列关系式恒成立的是 ()

A. $\frac{1}{x^2+1} > \frac{1}{y^2+1}$ B. $\ln(x^2+1) > \ln(y^2+1)$

C. $\sin x > \sin y$ D. $x^3 > y^3$

2. 不等式 $\frac{2-x}{x+4} > 1$ 的解集是 ()

A. $(-\infty, -1)$ B. $(-4, 2)$ C. $(-4, -1)$ D. $(-4, +\infty)$

3. 若直线 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 过点 $(1, 1)$ ，则 $a+b$ 的最小值等于 ()

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

4. 4 位同学各自在周六、周日两天中任选一天参加公益活动，则周六、周日都有同学参加公益活动的概率为 ()

A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{5}{8}$ D. $\frac{7}{8}$

5. 某公司 10 位员工的月工资（单位：元）为 $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ ，其均值和方差分别为 $\bar{x}$ 和 s^2 ，若从下月起每位员工的月工资增加 100 元，则这 10 位员工下月工资的均值和方差分别为 ()

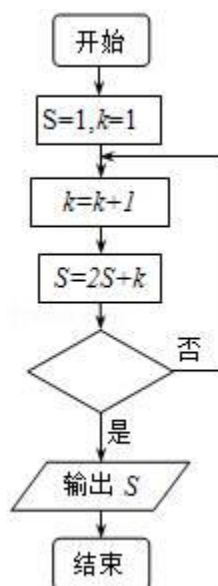
A. $\bar{x}, s^2+100^2$ B. $\bar{x}+100, s^2+100^2$

C. $\bar{x}, s^2$ D. $\bar{x}+100, s^2$

6. 已知一组具有线性相关关系的数据 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ 其样本点的中心为 $(2, 3)$ ，若其回归直线的斜率的估计值为 -1.2 ，则该回归直线的方程为 ()

A. $y = -1.2x+2$ B. $y = 1.2x+3$ C. $y = -1.2x+5.4$ D. $y = 1.2x+0.6$

7. 某程序框图如图所示，若输出的 $S=57$ ，则判断框内为 ()



A. $k > 4$? B. $k > 5$? C. $k > 6$? D. $k > 7$?

8. 已知 $(x^2+1)(x-2)^9 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \dots + a_{11}(x-1)^{11}$, 则 $a_1 + a_2 + \dots + a_{11}$ 的值为 ()

A. 0 B. 2 C. 255 D. -2

9. 已知正方形 ABCD 的边长为 2, H 是边 DA 的中点. 在正方形 ABCD 内部随机取一点 P, 则满足 $|PH| < \sqrt{2}$ 的概率为 ()

A. $\frac{\pi}{8}$ B. $\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}$

10. 若平面区域 $\begin{cases} x+y-3 \geq 0 \\ 2x-y-3 \leq 0 \\ x-2y+3 \geq 0 \end{cases}$, 夹在两条斜率为 1 的平行直线之间, 则这两条

平行直线间的距离的最小值是 ()

A. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ D. $\sqrt{5}$

11. 关于 x 的不等式 $x^2 + ax - 2 < 0$ 在区间 $[1, 4]$ 上有解, 则实数 a 的取值范围为 ()

A. $(-\infty, 1)$ B. $(-\infty, 1]$ C. $(1, +\infty)$ D. $[1, +\infty)$

12. 在送医下乡活动中, 某医院安排甲、乙、丙、丁、戊五名医生到 3 所乡医院工作, 每所医院至少安排一名医生, 且甲、乙两名医生不安排在同一医院, 丙、丁两名医生也不安排在同一医院, 则不同的分配方法总数为 ()

A. 36 B. 72 C. 84 D. 108

二、填空题：（本题包括 4 小题，共 20 分）

13. 某单位有 840 名职工，现采用系统抽样抽取 42 人做问卷调查，将 840 人按 1, 2, ..., 840 随机编号，则抽取的 42 人中，编号落入区间 [61, 120] 的人数为_____.

14. $(a+x)(1+x)^4$ 的展开式中 x 的奇数次幂项的系数之和为 32，则 a =_____.

15. 当变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} y \geq x \\ x+3y \leq 4 \\ x \geq m \end{cases}$ 时， $z=x-3y$ 的最大值为 8，则实数 m 的值是_____.

16. 已知函数 $f(x) = x^2 + mx - 1$ ，若对于任意 $x \in [m, m+1]$ ，都有 $f(x) < 0$ 成立，则实数 m 的取值范围是_____.

三、解答题：（本题包括 6 小题，17 题 10 分，18-22 题每题 12 分，共 70 分）

17. 已知 $x > 0, y > 0, 2xy = x + 4y + a$

(1) 当 $a=6$ 时，求 xy 的最小值；

(2) 当 $a=0$ 时，求 $x+y+\frac{2}{x}+\frac{1}{2y}$ 的最小值.

18. 现有 8 名奥运会志愿者，其中志愿者 A_1, A_2, A_3 通晓日语， B_1, B_2, B_3 通晓俄语， C_1, C_2 通晓韩语. 从中选出通晓日语、俄语和韩语的志愿者各 1 名，组成一个小组.

(I) 求 A_1 被选中的概率；

(II) 求 B_1 和 C_1 不全被选中的概率.

19. 设 $m, n \in \mathbb{N}$, $f(x) = (1+x)^m + (1+x)^n$.

(1) 当 $m=n=5$ 时，若 $f(x) = a_5(1-x)^5 + a_4(1-x)^4 + \cdots + a_1(1-x) + a_0$ ，求 $a_0 + a_2 + a_4$ 的值；

(2) $f(x)$ 展开式中 x 的系数是 9，当 m, n 变化时，求 x^2 系数的最小值.

20. 某工厂在试验阶段大量生产一种零件，这种零件有 A、B 两项技术指标需要检测，设各项技术指标达标与否互不影响. 若有且仅有一项技术指标达标的概率为 $\frac{5}{12}$ ，至少一项技术指标达标的概率为 $\frac{11}{12}$. 按质量检验规定：两项技术指标都

达标的零件为合格品.

- (I) 求一个零件经过检测为合格品的概率是多少?
- (II) 任意依次抽取该种零件 4 个, 设 ξ 表示其中合格品的个数, 求 ξ 的分布列及数学期望 $E\xi$.

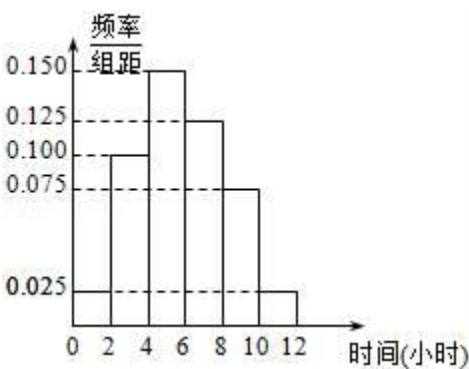
21. 某高校共有学生 15 000 人, 其中男生 10 500 人, 女生 4500 人. 为调查该校学生每周平均体育运动时间的情况, 采用分层抽样的方法, 收集 300 位学生每周平均体育运动时间的样本数据 (单位: 小时).

- (1) 应收集多少位女生的样本数据?
- (2) 根据这 300 个样本数据, 得到学生每周平均体育运动时间的频率分布直方图 (如图所示), 其中样本数据的分组区间为: $[0, 2]$, $(2, 4]$, $(4, 6]$, $(6, 8]$, $(8, 10]$, $(10, 12]$. 估计该校学生每周平均体育运动时间超过 4 小时的概率.

(3) 在样本数据中, 有 60 位女生的每周平均体育运动时间超过 4 小时, 请完成每周平均体育运动时间与性别列联表, 并判断是否有 95% 的把握认为“该校学生的每周平均体育运动时间与性别有关”.

$P(K^2 \geq k_0)$	0.10	0.05	0.010	0.005
k_0	2.706	3.841	6.635	7.879

附: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.



22. 如图所示, 机器人海宝按照以下程序运行:

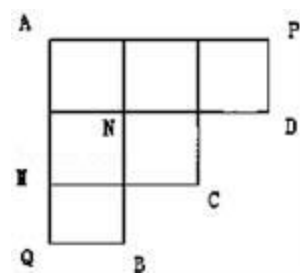
- ①从 A 出发到达点 B 或 C 或 D, 到达点 B、C、D 之一就停止
- ②每次只向右或向下按路线运行

③在每个路口向下的概率 $\frac{1}{3}$

④到达 P 时只向下，到达 Q 点只向右

(1) 求海宝过点从 A 经过 M 到点 B 的概率，求海宝过点从 A 经过 N 到点 C 的概率；

(2) 记海宝到点 B、C、D 的事件分别记为 $X=1$ ， $X=2$ ， $X=3$ ，求随机变量 X 的分布列及期望.



2016-2017 学年江西省上饶市德兴一中高二（上）期中数学试卷（理科）（3-12 班）

参考答案与试题解析

一、选择题：（本题包括 12 小题，共 60 分，每小题只有一个选项符合题意）

1. 已知实数 x, y 满足 $a^x < a^y$ ($0 < a < 1$)，则下列关系式恒成立的是 ()

A. $\frac{1}{x^2+1} > \frac{1}{y^2+1}$ B. $\ln(x^2+1) > \ln(y^2+1)$

C. $\sin x > \sin y$ D. $x^3 > y^3$

【考点】指数函数的图象与性质；对数函数的图象与性质.

【分析】本题主要考查不等式的大小比较，利用函数的单调性的性质是解决本题的关键.

【解答】解： $\because$ 实数 x, y 满足 $a^x < a^y$ ($0 < a < 1$)， $\therefore x > y$,

A. 若 $x=1, y=-1$ 时，满足 $x > y$ ，但 $\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{y^2+1} = \frac{1}{2}$ ，故 $\frac{1}{x^2+1} > \frac{1}{y^2+1}$ 不成立.

B. 若 $x=1, y=-1$ 时，满足 $x > y$ ，但 $\ln(x^2+1) = \ln(y^2+1) = \ln 2$ ，故 $\ln(x^2+1) > \ln(y^2+1)$ 不成立.

C. 当 $x=\pi, y=0$ 时，满足 $x > y$ ，此时 $\sin x = \sin \pi = 0$ ， $\sin y = \sin 0 = 0$ ，有 $\sin x > \sin y$ ，但 $\sin x > \sin y$ 不成立.

D. $\because$ 函数 $y=x^3$ 为增函数，故当 $x > y$ 时， $x^3 > y^3$ ，恒成立，
故选：D.

2. 不等式 $\frac{2-x}{x+4} > 1$ 的解集是 ()

A. $(-\infty, -1)$ B. $(-4, 2)$ C. $(-4, -1)$ D. $(-4, +\infty)$

【考点】其他不等式的解法.

【分析】利用移项，通分，转化不等式求解即可.

【解答】解：由不等式 $\frac{2-x}{x+4} > 1$ 可得 $\frac{2-x}{x+4} - 1 > 0$ ，即 $\frac{2x+2}{x+4} < 0$ 等价于 $(2x+2)(x+4) < 0$ ，

解得： $-4 < x < -1$

不等式 $\frac{2-x}{x+4} > 1$ 的解集是 $(-4, -1)$ 。

故选 C。

3. 若直线 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 过点 $(1, 1)$ ，则 $a+b$ 的最小值等于 ()

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

【考点】基本不等式在最值问题中的应用。

【分析】将 $(1, 1)$ 代入直线得： $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ ，从而 $a+b = (\frac{1}{a} + \frac{1}{b})(a+b)$ ，利用基本不等式求出即可。

【解答】解： $\because$ 直线 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 过点 $(1, 1)$ ，

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1 \quad (a > 0, b > 0),$$

$$\text{所以 } a+b = (\frac{1}{a} + \frac{1}{b})(a+b) = 2 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2 + 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 4,$$

当且仅当 $\frac{b}{a} = \frac{a}{b}$ 即 $a=b=2$ 时取等号，

$\therefore a+b$ 最小值是 4，

故选：C。

4. 4 位同学各自在周六、周日两天中任选一天参加公益活动，则周六、周日都有同学参加公益活动的概率为 ()

A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{5}{8}$ D. $\frac{7}{8}$

【考点】等可能事件的概率。

【分析】求得 4 位同学各自在周六、周日两天中任选一天参加公益活动、周六、周日都有同学参加公益活动的情况，利用古典概型概率公式求解即可。

【解答】解：4 位同学各自在周六、周日两天中任选一天参加公益活动，共有 $2^4=16$ 种情况，

周六、周日都有同学参加公益活动，共有 $2^4 - 2 = 16 - 2 = 14$ 种情况，

$\therefore$ 所求概率为 $\frac{14}{16} = \frac{7}{8}$.

故选：D.

5. 某公司 10 位员工的月工资（单位：元）为 $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ ，其均值和方差分别为 $\bar{x}$ 和 s^2 ，若从下月起每位员工的月工资增加 100 元，则这 10 位员工下月工资的均值和方差分别为（ ）

- A. $\bar{x}, s^2+100^2$ B. $\bar{x}+100, s^2+100^2$
C. $\bar{x}, s^2$ D. $\bar{x}+100, s^2$

【考点】极差、方差与标准差；众数、中位数、平均数.

【分析】根据变量之间均值和方差的关系和定义，直接代入即可得到结论.

【解答】解：由题意知 $y_i = x_i + 100$,

$$\text{则 } \bar{y} = \frac{1}{10} (x_1 + x_2 + \dots + x_{10} + 100 \times 10) = \frac{1}{10} (x_1 + x_2 + \dots + x_{10}) = \bar{x} + 100,$$

$$\text{方差 } s^2 = \frac{1}{10} [(x_1 + 100 - (\bar{x} + 100))^2 + (x_2 + 100 - (\bar{x} + 100))^2 + \dots + (x_{10} + 100 - (\bar{x} + 100))^2] \\ = \frac{1}{10} [(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{10} - \bar{x})^2] = s^2.$$

故选：D.

6. 已知一组具有线性相关关系的数据 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ 其样本点的中心为 $(2, 3)$ ，若其回归直线的斜率的估计值为 -1.2 ，则该回归直线的方程为（ ）

- A. $y = -1.2x + 2$ B. $y = 1.2x + 3$ C. $y = -1.2x + 5.4$ D. $y = 1.2x + 0.6$

【考点】线性回归方程.

【分析】可设回归直线为 $y = -1.2x + b$ ，由于回归直线过样本点的中心为 $(2, 3)$ ，代入数据可得关于 b 的方程，解之可得答案.

【解答】解：由题意可设回归直线为 $y = -1.2x + b$,

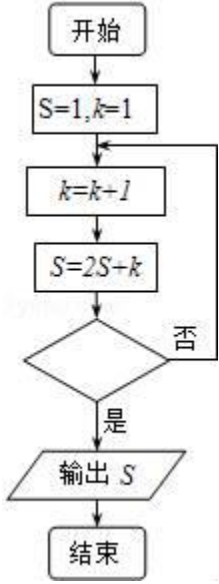
由于回归直线过样本点的中心为 $(2, 3)$,

故有 $3 = -1.2 \times 2 + b$ ，解得 $b = 5.4$

故该回归直线的方程为 $y = -1.2x + 5.4$

故选 C

7. 某程序框图如图所示，若输出的 $S=57$ ，则判断框内为（ ）



A. $k > 4?$ B. $k > 5?$ C. $k > 6?$ D. $k > 7?$

【考点】程序框图.

【分析】分析程序中各变量、各语句的作用，再根据流程图所示的顺序，可知：该程序的作用是累加并输入 S 的值，条件框内的语句是决定是否结束循环，模拟执行程序即可得到答案.

【解答】解：程序在运行过程中各变量值变化如下表：

K S 是否继续循环

循环前 1 1/

第一圈 2 4 是

第二圈 3 11 是

第三圈 4 26 是

第四圈 5 57 否

故退出循环的条件应为 $k > 4$

故答案选 A.

8. 已知 $(x^2+1)(x-2)^9=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\dots+a_{11}(x-1)^{11}$, 则 $a_1+a_2+\dots+a_{11}$ 的值为 ()

A. 0 B. 2 C. 255 D. -2

【考点】二项式系数的性质.

【分析】用赋值法, 在所给的等式中, 分别令 $x=1$ 和 2 , 即可求出对应的值.

【解答】解: 在 $(x^2+1)(x-2)^9=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\dots+a_{11}(x-1)^{11}$ 中,

令 $x=1$, 得 $(1+1) \times (1-2)^9=a_0$, 即 $a_0=-2$;

令 $x=2$, 得 $a_0+a_1+a_2+\dots+a_{11}=0$,

$\therefore a_1+a_2+a_3+\dots+a_{11}=2$

故选 B.

9. 已知正方形 ABCD 的边长为 2, H 是边 DA 的中点. 在正方形 ABCD 内部随机取一点 P, 则满足 $|PH| < \sqrt{2}$ 的概率为 ()

A. $\frac{\pi}{8}$ B. $\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}$

【考点】几何概型.

【分析】根据几何概型的概率计算公式, 分别求出正方形的面积和满足 $|PH| < \sqrt{2}$ 的正方形内部的点 P 的集合”的面积即可求出所求.

【解答】解: (1) 如图所示, 正方形的面积 $S_{\text{正方形 ABCD}}=2 \times 2=4$.

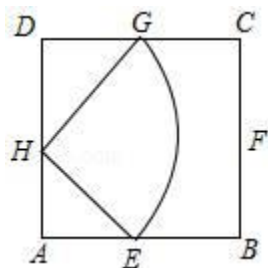
设“满足 $|PH| < \sqrt{2}$ 的正方形内部的点 P 的集合”为事件 M,

则 $S(M) = S_{\triangle DGH} + S_{\triangle AEH} + S_{\text{扇形 EGH}} = 2 \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 + \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\pi}{2} \times \sqrt{2} = 1 + \frac{\pi}{2}$,

$\therefore P(M) = \frac{1 + \frac{\pi}{2}}{4} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$.

故满足 $|PH| < \sqrt{2}$ 的概率为 $\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$.

故选 B.



10. 若平面区域 $\begin{cases} x+y-3 \geq 0 \\ 2x-y-3 \leq 0 \\ x-2y+3 \geq 0 \end{cases}$ 夹在两条斜率为 1 的平行直线之间，则这两条

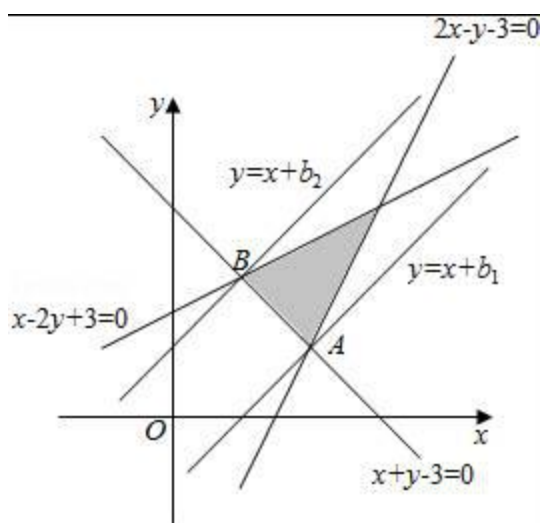
平行直线间的距离的最小值是 ()

- A. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ D. $\sqrt{5}$

【考点】简单线性规划.

【分析】作出平面区域，找出距离最近的平行线的位置，求出直线方程，再计算距离.

【解答】解：作出平面区域如图所示：



$\therefore$ 当直线 $y=x+b$ 分别经过 A, B 时，平行线间的距离相等.

联立方程组 $\begin{cases} x+y-3=0 \\ 2x-y-3=0 \end{cases}$ ，解得 A (2, 1)，

联立方程组 $\begin{cases} x+y-3=0 \\ x-2y+3=0 \end{cases}$ ，解得 B (1, 2).

两条平行线分别为 $y=x-1$, $y=x+1$, 即 $x-y-1=0$, $x-y+1=0$.

$\therefore$ 平行线间的距离为 $d = \frac{|-1-1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$,

故选: B.

11. 关于 x 的不等式 $x^2+ax-2<0$ 在区间 $[1, 4]$ 上有解, 则实数 a 的取值范围为 ()

A. $(-\infty, 1)$ B. $(-\infty, 1]$ C. $(1, +\infty)$ D. $[1, +\infty)$

【考点】一元二次不等式的解法.

【分析】关于 x 的不等式 $x^2+ax-2<0$ 在区间 $[1, 4]$ 上有解, 等价于 $a < (\frac{2}{x} - x)_{\max}$, $x \in [1, 4]$, 求出 $f(x) = \frac{2}{x} - x$ 在 $x \in [1, 4]$ 的最大值即可.

【解答】解: 关于 x 的不等式 $x^2+ax-2<0$ 在区间 $[1, 4]$ 上有解,

等价于 $a < (\frac{2}{x} - x)_{\max}$, $x \in [1, 4]$;

设 $f(x) = \frac{2}{x} - x$, $x \in [1, 4]$,

则函数 $f(x)$ 在 $x \in [1, 4]$ 单调递减,

且当 $x=1$ 时, 函数 $f(x)$ 取得最大值 $f(1)=1$;

所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 1)$.

故选: A.

12. 在送医下乡活动中, 某医院安排甲、乙、丙、丁、戊五名医生到 3 所乡医院工作, 每所医院至少安排一名医生, 且甲、乙两名医生不安排在同一医院, 丙、丁两名医生也不安排在同一医院, 则不同的分配方法总数为 ()

A. 36 B. 72 C. 84 D. 108

【考点】排列、组合及简单计数问题.

【分析】五名医生到 3 所乡医院工作, 每所医院至少安排一名医生, 名医生可以分为 $(2, 2, 1)$ 和 $(3, 1, 1)$ 两种分法, 根据分类计数原理可得

【解答】解: ①当有二所医院分 2 人另一所医院分 1 人时, 总数有: $\frac{C_5^2 \cdot C_3^2}{A_2^2} \cdot A_3^3$

=90 种，其中有、甲乙二人或丙丁二人在同一组有 $A_3^3+4A_3^3=30$ 种；故不同的分配方法是 $90-30=60$ 种

②有二所医院分 1 人另一所医院分 3 人，有 $C_2^1 \cdot C_2^1 \cdot A_3^3=24$ 种.

根据分类计数原理得，故不同的分配方法总数 $60+24=84$.

故选：C

二、填空题：（本题包括 4 小题，共 20 分）

13. 某单位有 840 名职工，现采用系统抽样抽取 42 人做问卷调查，将 840 人按 1, 2, ..., 840 随机编号，则抽取的 42 人中，编号落入区间 [61, 120] 的人数为 3.

【考点】频率分布直方图.

【分析】根据系统抽样的特点，求出组距是 20，再计算样本数据落入区间 [61, 120] 的人数.

【解答】解：根据系统抽样的特点，得：

组距应为 $840 \div 42=20$,

$\therefore$ 抽取的 42 人中，编号落入区间 [61, 120] 的人数为 $\div 20=3$.

故答案为：3.

14. $(a+x)(1+x)^4$ 的展开式中 x 的奇数次幂项的系数之和为 32，则 $a=\underline{3}$.

【考点】二项式定理的应用.

【分析】给展开式中的 x 分别赋值 1, -1，可得两个等式，两式相减，再除以 2 得到答案.

【解答】解：设 $f(x) = (a+x)(1+x)^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_5x^5$,

令 $x=1$ ，则 $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_5 = f(1) = 16(a+1)$, ①

令 $x=-1$ ，则 $a_0 - a_1 + a_2 - \dots - a_5 = f(-1) = 0$. ②

① - ②得， $2(a_1 + a_3 + a_5) = 16(a+1)$,

所以 $2 \times 32 = 16(a+1)$,

所以 $a=3$.

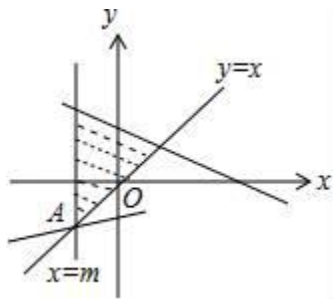
故答案为: 3.

15. 当变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} y \geq x \\ x+3y \leq 4 \\ x \geq m \end{cases}$ 时, $z=x-3y$ 的最大值为 8, 则实数 m 的值是 -4.

【考点】简单线性规划.

【分析】由约束条件作出可行域, 化目标函数为直线方程的斜截式, 数形结合得到最优解, 把最优解的坐标代入目标函数即可求得 m 值.

【解答】解: 由约束条件 $\begin{cases} y \geq x \\ x+3y \leq 4 \\ x \geq m \end{cases}$ 作出可行域如图,



联立 $\begin{cases} x=m \\ y=x \end{cases}$, 解得 $A(m, m)$,

化目标函数 $z=x-3y$ 为 $y=\frac{x}{3}-\frac{z}{3}$,

由图可知, 当直线 $y=\frac{x}{3}-\frac{z}{3}$ 过 A 时, 直线在 y 轴上的截距最小, z 有最大值.

此时 $z=m-3m=-2m=8$, 即 $m=-4$.

故答案为: -4.

16. 已知函数 $f(x)=x^2+mx-1$, 若对于任意 $x \in [m, m+1]$, 都有 $f(x) < 0$ 成立, 则实数 m 的取值范围是 $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$.

【考点】二次函数的性质.

【分析】由条件利用二次函数的性质可得 $\begin{cases} f(m)=2m^2-1 < 0 \\ f(m+1)=(m+1)^2+m(m+1)-1 < 0 \end{cases}$, 由此

求得 m 的范围.

【解答】解: $\because$ 二次函数 $f(x) = x^2 + mx - 1$ 的图象开口向上,

对于任意 $x \in [m, m+1]$, 都有 $f(x) < 0$ 成立, $\therefore \begin{cases} f(m) = 2m^2 - 1 < 0 \\ f(m+1) = (m+1)^2 + m(m+1) - 1 < 0 \end{cases}$,

即 $\begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2} < m < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ m(2m+3) < 0 \end{cases}$, 解得 $-\frac{\sqrt{2}}{2} < m < 0$,

故答案为: $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$.

三、解答题: (本题包括 6 小题, 17 题 10 分, 18-22 题每题 12 分, 共 70 分)

17. 已知 $x > 0$, $y > 0$, $2xy = x + 4y + a$

(1) 当 $a=6$ 时, 求 xy 的最小值;

(2) 当 $a=0$ 时, 求 $x+y+\frac{2}{x}+\frac{1}{2y}$ 的最小值.

【考点】基本不等式.

【分析】(1) 利用基本不等式的性质转化为二次函数即可得出、

(2) 利用“乘 1 法”与基本不等式的性质即可得出

【解答】解: (1) 当 $a=6$ 时, $2xy = x + 4y + 6 \geq 4\sqrt{xy} + 6$, 当且仅当 $x=4y=6$ 时, 等号成立.

即 $(\sqrt{xy})^2 - 2\sqrt{xy} - 3 \geq 0$,

$\therefore (\sqrt{xy}+1)(\sqrt{xy}-3) \geq 0$,

$\therefore \sqrt{xy} \geq 3$,

$\therefore xy \geq 9$,

$\therefore xy$ 的最小值为 9.

(2) 当 $a=0$ 时, 可得 $2xy = x + 4y$,

两边都除以 $2xy$, 得 $\frac{1}{2y} + \frac{2}{x} = 1$,

$\therefore x+y+\frac{2}{x}+\frac{1}{2y} = x+y+1 = (x+y)\left(\frac{1}{2y} + \frac{2}{x}\right) + 1 = \frac{7}{2} + \left(\frac{x}{2y} + \frac{2y}{x}\right) \geq \frac{7}{2} + 2\sqrt{\frac{x}{2y} \cdot \frac{2y}{x}} = \frac{11}{2}$,

当且仅当 $\frac{x}{2y} = \frac{2y}{x} = 1$, 即 $x=3$, $y=\frac{3}{2}$ 时取等号.

$\therefore x+y+\frac{2}{x}+\frac{1}{2y}$ 的最值为 $\frac{11}{2}$.

18. 现有 8 名奥运会志愿者, 其中志愿者 A_1, A_2, A_3 通晓日语, B_1, B_2, B_3 通晓俄语, C_1, C_2 通晓韩语. 从中选出通晓日语、俄语和韩语的志愿者各 1 名, 组成一个小组.

(I) 求 A_1 被选中的概率;

(II) 求 B_1 和 C_1 不全被选中的概率.

【考点】等可能事件的概率; 互斥事件与对立事件.

【分析】(I) 先用列举法, 求出从 8 人中选出日语、俄语和韩语志愿者各 1 名, 所有一切可能的结果对应的基本事件总个数, 再列出 A_1 恰被选中这一事件对应的基本事件个数, 然后代入古典概型公式, 即可求解.

(II) 我们可利用对立事件的减法公式进行求解, 即求出“ B_1, C_1 不全被选中”的对立事件“ B_1, C_1 全被选中”的概率, 然后代入对立事件概率减法公式, 即可得到结果.

【解答】解: (I) 从 8 人中选出日语、俄语和韩语志愿者各 1 名,

其一切可能的结果组成的基本事件空间 $\Omega = \{ (A_1, B_1, C_1), (A_1, B_1, C_2), (A_1, B_2, C_1), (A_1, B_2, C_2), (A_1, B_3, C_1), (A_1, B_3, C_2), (A_2, B_1, C_1), (A_2, B_1, C_2), (A_2, B_2, C_1), (A_2, B_2, C_2), (A_2, B_3, C_1), (A_2, B_3, C_2), (A_3, B_1, C_1), (A_3, B_1, C_2), (A_3, B_2, C_1), (A_3, B_2, C_2), (A_3, B_3, C_1), (A_3, B_3, C_2) \}$

由 18 个基本事件组成. 由于每一个基本事件被抽取的机会均等,

因此这些基本事件的发生是等可能的.

用 M 表示“ A_1 恰被选中”这一事件, 则 $M = \{ (A_1, B_1, C_1), (A_1, B_1, C_2), (A_1, B_2, C_1), (A_1, B_2, C_2), (A_1, B_3, C_1), (A_1, B_3, C_2) \}$

事件 M 由 6 个基本事件组成, 因而 $P(M) = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$.

(II) 用 N 表示“ B_1, C_1 不全被选中”这一事件,

则其对立事件 $\bar{N}$ 表示“ B_1, C_1 全被选中”这一事件,

由于 $\bar{N} = \{ (A_1, B_1, C_1), (A_2, B_1, C_1), (A_3, B_1, C_1) \}$, 事件 $\bar{N}$ 有 3 个基本事件组成,

所以 $P(\bar{N}) = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$, 由对立事件的概率公式得 $P(N) = 1 - P(\bar{N}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

19. 设 $m, n \in \mathbb{N}$, $f(x) = (1+x)^m + (1+x)^n$.

(1) 当 $m=n=5$ 时, 若 $f(x) = a_5(1-x)^5 + a_4(1-x)^4 + \dots + a_1(1-x) + a_0$, 求 $a_0 + a_2 + a_4$ 的值;

(2) $f(x)$ 展开式中 x 的系数是 9, 当 m, n 变化时, 求 x^2 系数的最小值.

【考点】二项式系数的性质.

【分析】(1) 当 $m=n=5$ 时, $f(x) = 2(1+x)^5$, 令 $x=0$ 时, $x=2$ 时, 代入相加即可得出.

(2) 由题意可得: $\binom{1}{m} + \binom{1}{n} = m+n=9$. x^2 系数 $= \binom{2}{m} + \binom{2}{n} = \frac{m^2 - m + n^2 - n}{2} = (m - \frac{9}{2})^2 + \frac{63}{4}$. 利用二次函数的单调性即可得出.

【解答】解: (1) 当 $m=n=5$ 时, $f(x) = 2(1+x)^5$, 令 $x=0$ 时, $f(0) = a_5 + a_4 + \dots + a_1 + a_0 = 2$, 令 $x=2$ 时, $f(0) = -a_5 + a_4 + \dots - a_1 + a_0 = 2 \times 3^5$,

相加可得: $a_0 + a_2 + a_4 = \frac{2 + 2 \times 3^5}{2} = 244$.

(2) 由题意可得: $\binom{1}{m} + \binom{1}{n} = m+n=9$.

x^2 系数 $= \binom{2}{m} + \binom{2}{n} = \frac{m^2 - m + n^2 - n}{2} = \frac{m^2 + n^2 - 9}{2} = \frac{m^2 + (9-m)^2 - 9}{2} = (m - \frac{9}{2})^2 + \frac{63}{4}$.

又 $m, n \in \mathbb{N}$, $\therefore m=4$ 或 5, 其最小值为 16.

即 $\begin{cases} m=4 \\ n=5 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m=5 \\ n=4 \end{cases}$ 时, x^2 系数的最小值为 16.

20. 某工厂在试验阶段大量生产一种零件, 这种零件有 A、B 两项技术指标需要检测, 设各项技术指标达标与否互不影响. 若有且仅有一项技术指标达标的概率为 $\frac{5}{12}$, 至少一项技术指标达标的概率为 $\frac{11}{12}$. 按质量检验规定: 两项技术指标都达标的零件为合格品.

(I) 求一个零件经过检测为合格品的概率是多少?

(II) 任意依次抽取该种零件 4 个, 设 ξ 表示其中合格品的个数, 求 ξ 的分布列及数学期望 $E\xi$.

【考点】 离散型随机变量及其分布列; 离散型随机变量的期望与方差.

【分析】 (I) 设 A、B 两项技术指标达标的概率分别为 P_1 、 P_2 , 由题意得

$$\begin{cases} P_1(1-P_2)+(1-P_1)P_2=\frac{5}{12} \\ 1-(1-P_1)(1-P_2)=\frac{11}{12} \end{cases}, \text{求得 } P_1 \text{ 和 } P_2 \text{ 的值, 再根据 } P=P_1 \cdot P_2, \text{ 求得结果.}$$

(II) 依题意知 $\xi \sim B(4, \frac{1}{2})$, 可得分布列和 $E\xi$ 的值.

【解答】 解: (I) 设 A、B 两项技术指标达标的概率分别为 P_1 、 P_2 ,

$$\text{由题意, 得 } \begin{cases} P_1(1-P_2)+(1-P_1)P_2=\frac{5}{12} \\ 1-(1-P_1)(1-P_2)=\frac{11}{12} \end{cases}, \text{解得 } P_1=\frac{3}{4}, P_2=\frac{2}{3}, \text{ 或 } P_1=\frac{2}{3}, P_2=\frac{3}{4}.$$

$\therefore P=P_1 \cdot P_2=\frac{1}{2}$, 即, 一个零件经过检测为合格品的概率为 $\frac{1}{2}$.

(II) 依题意知 $\xi \sim B(4, \frac{1}{2})$,

分布列为 $P(\xi=k)=C_4^k (\frac{1}{2})^{4-k} (\frac{1}{2})^k$, 其中 $k=0, 1, 2, 3, 4$, $E\xi=4 \times \frac{1}{2}=2$.

21. 某高校共有学生 15 000 人, 其中男生 10 500 人, 女生 4500 人. 为调查该校学生每周平均体育运动时间的情况, 采用分层抽样的方法, 收集 300 位学生每周平均体育运动时间的样本数据 (单位: 小时).

(1) 应收集多少位女生的样本数据?

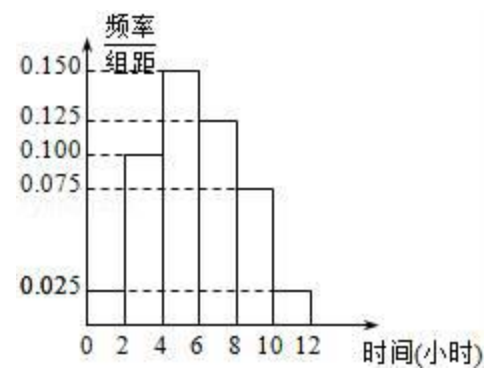
(2) 根据这 300 个样本数据, 得到学生每周平均体育运动时间的频率分布直方图 (如图所示), 其中样本数据的分组区间为: $[0, 2]$, $(2, 4]$, $(4, 6]$, $(6, 8]$, $(8, 10]$, $(10, 12]$. 估计该校学生每周平均体育运动时间超过 4 小时的概率.

(3) 在样本数据中, 有 60 位女生的每周平均体育运动时间超过 4 小时, 请完成每周平均体育运动时间与性别列联表, 并判断是否有 95% 的把握认为“该校学生的每周平均体育运动时间与性别有关”.

$P(K^2 \geq k_0)$	0.10	0.05	0.010	0.005
-------------------	------	------	-------	-------

k_0	2.706	3.841	6.635	7.879
-------	-------	-------	-------	-------

附： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.



【考点】独立性检验.

【分析】(1) 根据频率分布直方图进行求解即可.

(2) 由频率分布直方图先求出对应的频率, 即可估计对应的概率.

(3) 利用独立性检验进行求解即可

【解答】解: (1) $300 \times \frac{4500}{15000} = 90$, 所以应收集 90 位女生的样本数据.

(2) 由频率分布直方图得 $1 - 2 \times (0.100 + 0.025) = 0.75$,

所以该校学生每周平均体育运动时间超过 4 小时的概率的估计值为 0.75.

(3) 由 (2) 知, 300 位学生中有 $300 \times 0.75 = 225$ 人的每周平均体育运动时间超过 4 小时, 75 人的每周平均体育运动时间不超过 4 小时, 又因为样本数据中有 210 份是关于男生的, 90 份是关于女生的, 所以每周平均体育运动时间与性别列联表如下: 每周平均体育运动时间与性别列联表

	男生	女生	总计
每周平均体育运动时间 不超过 4 小时	45	30	75
每周平均体育运动时间 超过 4 小时	165	60	225
总计	210	90	300

结合列联表可算得 $K^2 = \frac{300(45 \times 60 - 165 \times 30)^2}{210 \times 90 \times 75 \times 225} = \frac{100}{21} \approx 4.762 > 3.841$

所以，有 95% 的把握认为“该校学生的每周平均体育运动时间与性别有关”。

22. 如图所示，机器人海宝按照以下程序运行：

①从 A 出发到达点 B 或 C 或 D，到达点 B、C、D 之一就停止

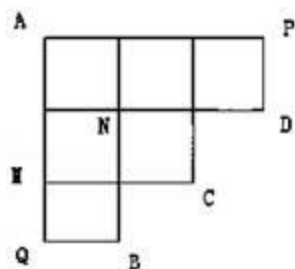
②每次只向右或向下按路线运行

③在每个路口向下的概率 $\frac{1}{3}$

④到达 P 时只向下，到达 Q 点只向右

(1) 求海宝过点从 A 经过 M 到点 B 的概率，求海宝过点从 A 经过 N 到点 C 的概率；

(2) 记海宝到点 B、C、D 的事件分别记为 $X=1$ ， $X=2$ ， $X=3$ ，求随机变量 X 的分布列及期望。



【考点】 离散型随机变量的期望与方差；排列、组合的实际应用。

【分析】 (1) 由题意，向下概率为 $\frac{1}{3}$ ，则向右概率为 $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ 。从 A 过 M 到 B，先有两次向下，再有一次向下与一次向右组合，可求其概率，同理可求海宝过点从 A 经过 N 到点 C 的概率；

(2) 求出 $X=1$ ， $X=2$ ， $X=3$ 相应的概率，从而可求随机变量 X 的分布列及期望。

【解答】 解：(1) 由题意，向下概率为 $\frac{1}{3}$ ，则向右概率为 $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ 。

从 A 过 M 到 B，先有两次向下，再有一次向下与一次向右组合，其概率为

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 C_2^1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{81};$$

从 A 过 N 到 C，概率为 $C_2^1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot C_2^1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{81}$

$$(2) P(X=1) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + C_3^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{3+6}{81} = \frac{9}{81}; \quad P(X=2) = C_4^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{24}{81};$$

$$P(X=3) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 + C_3^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{24+24}{81} = \frac{48}{81},$$

$$\therefore E(X) = \frac{9}{81} + \frac{24}{81} \times 2 + \frac{48}{81} \times 3 = \frac{201}{81} = \frac{67}{27}$$