

2015—2016 学年度上学期期末考试高三年级

数学理科试卷

(本试卷满分 150 分, 考试时间为 120 分钟)

一、选择题(本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分, 在每小题给出的四个选项中只有一项是符合题目要求的)

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x | \log_x 4 = 2\}$, 则 $A \cup B =$

- A. $\{-2, 1, 2\}$ B. $\{1, 2\}$ C. $\{-2, 2\}$ D. $\{2\}$

2. 若复数 $z = (a^2 + 2a - 3) + (a + 3)i$ 为纯虚数(i 为虚数单位), 则实数 a 的值是

- A. -3 B. -3 或 1 C. 3 或 -1 D. 1

3. 已知向量 $\mathbf{a} = (1, 3)$, $\mathbf{b} = (-2, m)$, 若 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ 垂直, 则 m 的值为

- A. 1 B. -1 C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

4. 直线 $x + (a^2 + 1)y + 1 = 0$ 的倾斜角的取值范围是

- A. $[0, \frac{\pi}{4}]$ B. $[\frac{3\pi}{4}, \pi)$ C. $[0, \frac{\pi}{4}] \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$ D. $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \cup [\frac{3\pi}{4}, \pi)$

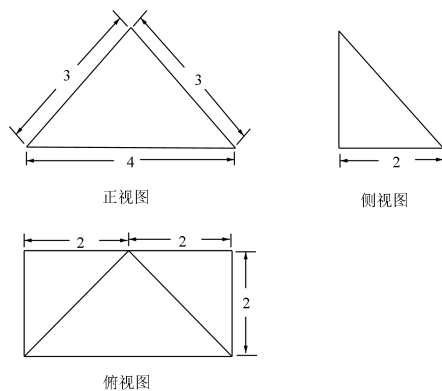
5. 若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是

$$a_n = (-1)^n (3n - 2), \text{ 则 } a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} =$$

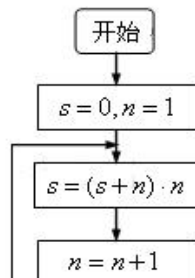
- A. 15 B. 12 C. -12 D. -15

6. 已知四棱锥 $P - ABCD$ 的三视图如图所示, 则四棱锥 $P - ABCD$ 的四个侧面中面积最大的值是

- A. 3 B. $2\sqrt{5}$
C. 6 D. 8



7. 右图是某算法的程序框图, 若程序运行后输出



的结果是 27, 则判断框①处应填入的条件是

- A. $n > 2$ B. $n > 3$
C. $n > 4$ D. $n > 5$

8. 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{5, 6, 7\}$, $C = \{8, 9\}$.

现在从三个集合中取出两个集合, 再从这两个集合中各

取出一个元素, 组成一个含有两个元素的集合, 则一共

可以组成 () 个集合

- A. 24 B. 36 C. 26 D. 27

9. 已知点 $P(2, 0)$, 正方形 $ABCD$ 内接于 $\odot O: x^2 + y^2 = 2$, M 、 N 分别为边

AB 、 BC 的中点, 当正方形 $ABCD$ 绕圆心 O 旋转时, $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{ON}$ 的取值范围为

- A. $[-1, 1]$ B. $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ C. $[-2, 2]$ D. $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$

10. 设双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_1 的直线交双曲线左支于

A, B 两点, 则 $|BF_2| + |AF_2|$ 的最小值为

- A. $\frac{19}{2}$ B. 11 C. 12 D. 16

11. 已知球 O 半径为 $\sqrt{5}$, 设 S 、 A 、 B 、 C 是球面上四个点, 其中 $\angle ABC = 120^\circ$

$AB = BC = 2$, 平面 $SAC \perp$ 平面 ABC , 则棱锥 $S - ABC$ 的体积的最大值为

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $3\sqrt{3}$

12. 已知函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, $g(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{4x}, & x > 0 \\ -x^2 - 6x - 8, & x \leq 0 \end{cases}$, 则方程

$g[f(x)] - a = 0$ (a 为正实数) 的根的个数不可能为

- A. 3 个 B. 4 个 C. 5 个 D. 6 个

二、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 设 $a > 0, b > 0$, $\sqrt{3}$ 是 3^a 与 3^b 的等比中项, 其中 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值为_____

14. 在 $\left(x^2 - \frac{a}{x}\right)^5$ 的二项展开式中, x 的一次项系数是 -10 , 则实数 a 的值为_____

15. 设 $[m]$ 表示不超过实数 m 的最大整数, 则在直角坐标平面 xOy 上, 满足 $[x]^2 + [y]^2 = 50$ 的点 $P(x, y)$ 所形成的图形的面积为_____

16. 定义区间 $(c, d), (c, d], [c, d), [c, d]$ 的长度均为 $d - c (d > c)$, 已知实数 $p > 0$,

则满足不等式 $\frac{1}{x-p} + \frac{1}{x} \geq 1$ 的 x 构成的区间长度之和为_____

三、解答题: 本大题共 6 小题, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \cos^2 x - \frac{1}{2} (x \in \mathbb{R})$.

(I) 当 $x \in \left[-\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right]$ 时, 求函数 $f(x)$ 的最小值和最大值;

(II) 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对应边分别为 a, b, c , 且 $c = \sqrt{3}$, $f(C) = 0$, 若向量 $\mathbf{m} = (1, \sin A)$ 与向量 $\mathbf{n} = (2, \sin B)$ 共线, 求 a, b 的值.

18. (本小题满分 12 分)

某地区试行高考考试改革: 在高三学年中举行 5 次统一测试, 学生如果通过其中

2 次测试即可获得足够学分升上大学继续学习，不用参加其余的测试，而每个学生最多也只能参加 5 次测试．假设某学生每次通过测试的概率都是 $\frac{1}{3}$ ，每次测试通过与否互相独立．规定：若前 4 次都没有通过测试，则第 5 次不能参加测试．

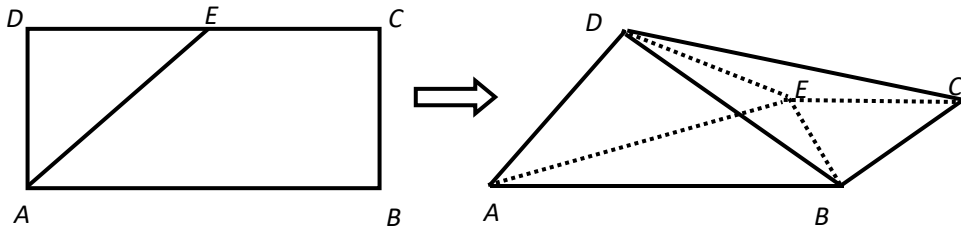
(I) 求该学生考上大学的概率；

(II) 如果考上大学或参加完 5 次测试就结束，记该生参加测试的次数为 ξ ，求变量 ξ 的分布列及数学期望 $E\xi$ ．

19. (本小题满分 12 分) 如图, 在长方形 $ABCD$ 中, $AB=2$, $AD=1$, E 为 DC 的中点, 现将 $\triangle DAE$ 沿 AE 折起, 使平面 $DAE \perp$ 平面 $ABCE$, 连 DB , DC , BE .

(I) 求证: $BE \perp$ 平面 ADE ;

(II) 求二面角 $E-BD-C$ 的余弦值.



(第 19 题)

20. (本小题满分 12 分) 已知 F_1 、 F_2 分别为椭圆 $C_1: \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的上、

下焦点，其中 F_1 也是抛物线 $C_2: x^2 = 4y$ 的焦点，点 M 是 C_1 与 C_2 在第二象限的交点，且 $|MF_1| = \frac{5}{3}$.

(I) 求椭圆 C_1 的方程；

(II) 当过点 $P(1, 3)$ 的动直线 l 与椭圆 C_1 相于两不同点 A, B 时，在线段 AB 上取点

Q ，满足 $\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|} = \frac{|\overrightarrow{AQ}|}{|\overrightarrow{QB}|}$ ，证明：点 Q 总在某定直线上.

21. (本小题满分 12 分) 设函数 $f(x) = \frac{a}{x} + x \ln x, g(x) = x^3 - x^2 - 3$ 其中 $a \in R$.

(I) 当 $a = 2$ 时，求曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(1, f(1))$ 处的切线方程；

(II) 若存在 $x_1, x_2 \in [0, 2]$ ，使得 $g(x_1) - g(x_2) \geq M$ 成立，求整数 M 的最大值；

(III) 若对任意 $s, t \in [\frac{1}{2}, 2]$ 都有 $f(s) \geq g(t)$ ，求 a 的取值范围.

选做题

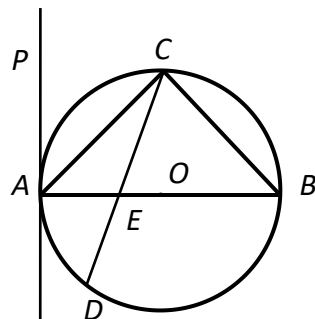
(请考生从 22、23、24 三题中任选一题做答，如果多做，则按所做的第一题记分)

22. (本小题满分 10 分) 选修 4—1：几何证明选讲

如图， $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ， AB 是 $\odot O$ 的直径， PA 是过点 A 的直线，且 $\angle PAC = \angle ABC$ 。

(I) 求证： PA 是 $\odot O$ 的切线；

(II) 如果弦 CD 交 AB 于点 E ， $AC = 8$ ， $CE : ED = 6 : 5$ ， $AE : EB = 2 : 3$ ，求 $\sin \angle BCE$ 。



23. (本小题满分 10 分) 选修 4—4：坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中，以 O 为极点， x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $\rho \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

圆 C 的参数方程为 $\rho \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

$$\text{圆 } C \text{ 的参数方程为 } \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} + r \cos \theta \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2} + r \sin \theta \end{cases}, (\theta \text{ 为参数}, r > 0)$$

(I) 求圆心 C 的一个极坐标；

(II) 当 r 为何值时，圆 C 上的点到直线 l 的最大距离为 3。

24. (本小题满分 10 分) 选修 4—5：不等式选讲

设函数 $f(x) = |2x - 1| + |2x - 3|$ ($x \in R$)。

(I) 解不等式 $f(x) \leq 5$ ；

(II) 若 $g(x) = \frac{1}{f(x) + m}$ 的定义域为 R ，求实数 m 的取值范围。