2016-2017学年第二学期期中考试
高二年级 数学试卷
（理科）

1．复数 $z=\dfrac{3\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$（i是虚数单位）的虚部为（　　）．

A．$-\dfrac{6}{5}\mathrm{i}$　　B．$-\dfrac{6}{5}$　　C．$\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$　　D．$\dfrac{3}{5}$

【答案】D

【解析】$z=\dfrac{3\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}=\dfrac{3\mathrm{i}(1+2\mathrm{i})}{5}=-\dfrac{6}{5}+\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$，

∴虚部为$\dfrac{3}{5}$，选D．

2．用反证法证明“设a，b为实数，则方程$x^2+ax+b=0$至少有一个实根”时，要做的假设是（　　）．

A．方程$x^2+ax+b=0$至多有一个实根　　B．方程$x^2+ax+b=0$至多有两个实根

C．方程$x^2+ax+b=0$恰好有两个实根　　D．方程$x^2+ax+b=0$没有实根

【答案】D

【解析】否定词，至少有一个的否定为没有．

3．用数学归纳法证明：$(n+1)(n+2)\cdots(n+n)=2^n\times1\times3\times\cdots+\times(2n-1)(n\in\mathbf{N}^*)$ 时，从“$n=k$ 到 $n=k+1$”时，左边应添乘的式子是（　　）．

A．$\dfrac{2k+1}{k+1}$　　B．$2(2k+1)$　　C．$2k+1$　　D．2

【答案】B

【解析】$n=k$ 时，左边$=(k+1)(k+2)\cdots(k+k)$，

$n=k+1$ 时，左边$=(k+2)(k+3)\cdots(k+k)(k+k+1)(k+k+2)$，

∴增加的为$\dfrac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)}=2(2k+1)$．

4．若从0，1，2，3，4，5这六个数字中选4个数字组成没有重复数字的四位偶数，则这样的四位数一共有（　　）．

A．120个　　B．180个　　C．156个　　D．132个

【答案】C

【解析】个位为0时，十，百，千可有$5\times4\times3=60$种，

个位为2或4时，千位有4种，十百有4×3种，

∴共$60+48\times2=156$（种）．

5．用总长14.8m的钢条制作一个长方体容器的框架，若容器底面的长比宽多0.5m，要使 它的容积最大，则容器底面的宽为（　　）．

A．0.5m　　B．0.7m　　C．1m　　D．1.5m

【答案】C

【解析】设宽为x，则长为$x+0.5$，

∵总长为14.8m，

∴高为$3.2-2x$，$0<x<1.6$，

∴体积为$V=x(0.5+x)(5.2-2x)=-2x^3+2.2x^2+1.6x$，

$V'=-6x^2+4.4x+1.6$，

当$x=1$时，V有极大值亦为最大值．

6．已知$f'(x)$是奇函数$f(x)$的导函数，$f(-1)=0$，当$x>0$时，$xf'(x)-f(x)>0$，则使得$f(x)>0$成立

的x的取值范围是（　　）．

A．$(-\infty,-1)\cup(0,1)$　　B．$(-1,0)\cup(1,+\infty)$　　C．$(-1,0)\cup(0,1)$　　D．$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

【答案】B

【解析】∵$\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$，$x>0$时，$xf'(x)-f(x)>0$，

∴当$x>0$时，$\dfrac{f(x)}{x}$为增函数，$x<0$时，$\dfrac{f(x)}{x}$为减函数，

∵$f(x)$有奇函数，

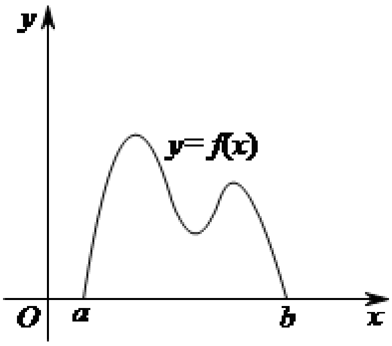
∴$\dfrac{f(x)}{x}$为偶函数，

∵$f(-1)=0$，

∴$f(1)=0$．

画出大致图象可得到$f(x)>0$时$x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$．

7．函数$y=f(x)$的图象如图所示，在区间$[a.b]$上可找到n个不同的数x_0，使得$\dfrac{f(x_0)}{x_0}=f'(x_0)$，那么$n=$（　　）．



A．1　　B．2　　C．3　　D．4

【答案】C

【解析】∵$\dfrac{f(x_0)}{x_0}=f'(x_0)$，

∴在x_0点处的切线过原点$(0,0)$，

由图象观察可知共有3个．

8．某医务人员说：“包括我在内，我们社区诊所医生和护士共有16名．无论是否把我算在内，下面说法都是对的，在这些医务人员中：护士对于医生；女医生多于女护士；女护士多于男护士；至少有一

名男医生．”请你推断说话的人的性别与职业是（　　）．

A．男护士　　B．女护士　　C．男医生　　D．女医生

【答案】A

【解析】逻辑推断，当为B，C，D时与题目条件矛盾．

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

9．复数 $\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}+\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$ 在复平面内对应的点位于第__________象限．

【答案】四

【解析】$\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}+\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}=\dfrac{2(1-\mathrm{i})}{2}+\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{\mathrm{i}}{2}$．

∴点为 $\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$ 在第四象限．

10．曲线 $y=x^2-1$ 与 x 轴围成图形的面积等于__________．

【答案】$\dfrac{4}{3}$

【解析】$\int_{-}^{1}(1-x^1)\mathrm{d}x=\left(x-\dfrac{x^3}{x}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\dfrac{4}{3}$．

11．若 $\left(x^2+\dfrac{3}{x}\right)^n$ 展开式的各项系数之和为 256，则 $n=$__________，其展开式中的含 x^2 项的系数为__________．（用数字作答）．

【答案】$n=4$，54

【解析】当 $x=1$ 时，$4^n=256$，

∴$n=4$．

$\mathrm{C}_4^r\cdot(x^2)^{4-r}\cdot\left(\dfrac{3}{x}\right)^r=\mathrm{C}_4^r\cdot x^{8-2r}\cdot 3^r\cdot x^{-r}=\mathrm{C}_4^r\cdot 3^r\cdot x^{8-3r}$．

∴当 $r=2$ 时为 $54x^2$．

12．在第二届北京农业嘉年华活动中，政法大学某系选派 5 名志愿者，分别承担翻译、导游、咨询、安检四项工作，每项工作至少有 1 人参加，那么不同的选派方法共有__________种；若其中甲不能承担翻译工作，那么不同的选派方法共有__________种．（请用数字作答）

【答案】240，180

【解析】先选两人同一个工作，然后再全排列，共 $\mathrm{C}_5^2\cdot\mathrm{A}_4^4=240$（种），

①当翻译工作有两个人完成时，有 $\mathrm{C}_4^2\cdot\mathrm{A}_3^2=36$（种），

②当翻译工作有一个人完成时，有 $\mathrm{C}_4^1\cdot\mathrm{C}_4^2\cdot\mathrm{A}_3^3=144$（种），共 180 种．

13．研究函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 的性质，完成下面两个问题：

①将 $f(2)$，$f(3)$，$f(5)$ 按从小到大排列为__________．

②函数 $g(x)=x^{\frac{1}{x}}(x>0)$ 的最大值为__________．

【答案】① $f(5)<f(2)<f(3)$；② $e^{\frac{1}{e}}$

【解析】①∵ $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，

∴ $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$， $f'(x)=0\Rightarrow x=e$，

∴ $f(x)$ 在 $(0,e)$ 上增，在 $(e,+\infty)$ 上减.

∴ $f(3)>f(5)$.

∵ $f(2)-f(5)=\dfrac{\ln 2}{2}-\dfrac{\ln 5}{5}=\dfrac{5\ln 2-2\ln 5}{10}=\dfrac{\ln 32-\ln 25}{10}>0$，

∴ $f(2)>f(5)$.

∵ $f(2)-f(3)=\dfrac{3\ln 2-2\ln 3}{6}=\dfrac{\ln 8-\ln 9}{6}<0$，

∴ $f(3)>f(2)$，

∴ $f(5)<f(2)<f(3)$.

② $\ln g(x)=\dfrac{1}{x}\ln x(x>0)$，令 $h(x)=\ln g(x)=\dfrac{1}{x}\ln x(x>0)$，

则 $h'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，由①知 $h(x)$ 在 $(0,e)$ 增，$(e,+\infty)$ 减，

∴ $h(x)_{\max}=h(e)=\dfrac{1}{e}$，

∴ $g(x)_{\max}=g(e)=e^{\frac{1}{e}}$.

14．已知函数 $f(x)=a\ln(x+1)-x^2$，若在区间 $(0,1)$ 内任取两个实数 p，q，且 $p\neq q$，不等式 $\dfrac{f(p+1)-f(q+1)}{p-q}>1$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为__________.

【答案】$[15,+\infty)$

【解析】$\dfrac{f(p+1)-f(q+1)}{p-q}$ 的几何意义表示为点 $(p+1,f(p+1))$ 与点 $(q+1,f(q+1))$ 两点间的斜率，

p，$q\in(0,1)$，

∴ $p+1$，$q+1\in(1,2)$.

∴ $\dfrac{f(p+1)-f(q+1)}{p-q}>1$ 恒成立表示函数 $f(x)$ 的曲线在区间 $(1,2)$ 内的斜率恒大于 1，即函数 $f(x)$ 的导数在区间 $(1,2)$ 内恒大于 1.

∴ $f'(x)=\dfrac{a}{x+1}-2x$，则 $\dfrac{a}{x+1}-2x>1$ 在区间 $(1,2)$ 内恒成立，

∴ $a>(1+2x)(x+1)=2x^2+3x+1$ 恒成立，

$x\in(1,2)$ 时，$(2x^2+3x+1)_{\max}=15$，

∴ $a\geqslant 15$.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分.

15.（本小题满分 13 分）

在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=3$，$a_{n+1}=3a_n-4n$，$n=1$，2，3，$\cdots$.

（Ⅰ）计算a_2，a_3，a_4的值．

（Ⅱ）根据（Ⅰ）的计算结果，猜想$\{a_n\}$的通项公式，并用数学归纳法加以证明．

【答案】（Ⅰ）$a_2=5$，$a_3=7$，$a_4=9$；（Ⅱ）$a_n=2n+1(n\in\mathbf{N}^*)$

【解析】（Ⅰ）$\because a_1=3$，$a_{n+1}=3a_n-4n$，

$\therefore$当$n=1$时，$a_2=5$，

$n=2$时，$a_3=7$，

$n=3$时，$a_4=9$．

（Ⅱ）由（Ⅰ）猜想$a_n=2n+1$，$(n\in\mathbf{N}^*)$．

证明：当$n=1$时，$a_1=3$，满足，

假设$n=k$时成立，则有$a_k=2k+1$，$(k\geqslant 2)$，

令$n=k$，则$a_{k+1}=3a_k-4k=3(2k+1)-4k=2k+3=2(k+1)+1$也满足．

$\therefore a_n=2n+1$，$(n\in\mathbf{N}^*)$．

16．（本小题满分13分）

已知i是虚数单位，复数z_1满足$(z_1-2)(1+\mathrm{i})=1-\mathrm{i}$．

（Ⅰ）求复数z_1．

（Ⅱ）若复数z_2的虚部为2，且$\dfrac{z_2}{z_1}$是实数，求$|z_2|$．

【答案】（Ⅰ）$z_1=2-\mathrm{i}$；（Ⅱ）$|z_2|=2\sqrt{5}$．

【解析】（Ⅰ）$\because (z_1-2)(1+\mathrm{i})=1-\mathrm{i}$，

$\therefore z_1=\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}+2=2-\mathrm{i}$．

（Ⅱ）$\because$复数z_2的虚部为2，

$\therefore$设$z_2=a+2\mathrm{i}$，

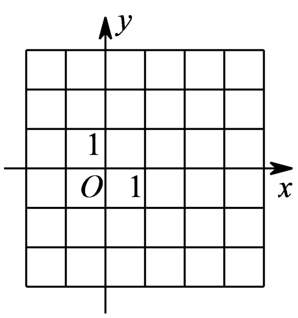
则$\dfrac{a+2\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=\dfrac{(2a-2)(a+4)\mathrm{i}}{5}$为实数，

$\therefore a=-4$，此时$z_2=-4+2\mathrm{i}$，

$\therefore |z_2|=2\sqrt{5}$．

17．（本小题满分13分）

已知函数$f(x)=x^3-\dfrac{9}{2}x^2+6x-3$．



（Ⅰ）在所给的坐标系中画出函数 $f(x)$ 在区间 $[0,3]$ 的大致图象．
（Ⅱ）若直线 $y=6x+b$ 是函数 $f(x)$ 的一条切线，求 b 的值．

【答案】（Ⅰ）见解析；（Ⅱ）$b=-3$ 或 $-\dfrac{33}{2}$

【解析】（Ⅰ）∵ $f(x)=x^3-\dfrac{9}{2}x^2+6x-3$，

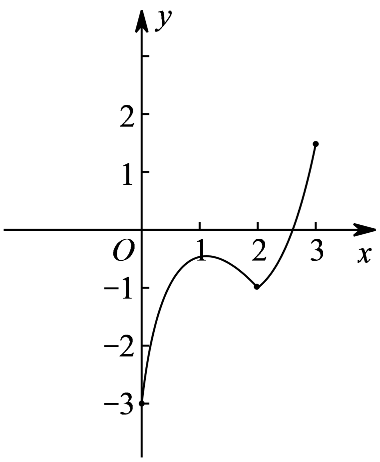
∴ $f'(x)=3x^2-9x+3=3(x-1)(x-2)$，

令 $f'(x)=0$，

∴ $x_1=1$，$x_2=2$，

则 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上为增，$(1,2)$ 上为减，$(2,+\infty)$ 上为增．

∴ $f(x)$ 在区间 $[0,3]$ 上的大致想象如下：



（Ⅱ）∵直线 $y=6x+b$ 是函数 $f(x)$ 的一条切线，

∴ $k=6$．

设在 $(x_0,f(x_0))$ 处切线为 $y=6x+b$，

则 $f'(x_0)=6$ 即 $3x_0^2-9x_0+6=6$，

∴ $x_0=0$ 或 3，

切点为 $(0,-3)$ 或 $\left(3,\dfrac{3}{2}\right)$．

∴ $b=-3$ 或 $-\dfrac{33}{2}$．

18．（本小题满分13分）

已知函数 $f(x)=(a-1)^2\ln x+(a-1)x+3(a\neq 1)$．

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的单调区间．

（Ⅱ）若函数 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内单调递增，求实数 a 的取值范围．

【答案】（Ⅰ）$a>1$ 时，单增区间为 $(0,+\infty)$，无单减区间

$a<1$ 时，单增区间为 $(0,1-a)$，单减区间为 $(1-a,+\infty)$

（Ⅱ）$a\leqslant -1$ 或 $a>1$

【解析】（Ⅰ）∵ $f(x)=(a-1)^2\cdot\ln x+(a-1)\cdot x+3(a\neq 1)$，$(x>0)$，

$\therefore\ f'(x)=\dfrac{(a-1)^2}{x}+(a-1)=(a-1)\cdot\left(\dfrac{a-1}{x}+1\right)=(a-1)\cdot\dfrac{x+a-1}{x}$，$(x>0)$，

$\because\ x>0$，$a\neq 1$，

$\therefore$①$a>1$时，$f'(x)>0$恒成立，

②$a<1$时，$f'(x)>0\Rightarrow x\in(0,1-a)$，

$f'(x)<0\Rightarrow x\in(1-a,+\infty)$，

$\therefore\ a>1$时，单增区间为$(0,+\infty)$，无单减区间

$a<1$时，单增区间为$(0,1-a)$，单减区间为$(1-a,+\infty)$．

（Ⅱ）由（Ⅰ）知当$f(x)$在$(1,2)$上增时，$1-a\geqslant 2$或$a>1$即可，

$\therefore\ a\leqslant -1$或$a>1$．

19．（本小题满分14分）

设函数$f(x)=x^2+a\ln(1+x)$有两个极值点x_1，x_2，且$x_1<x_2$．

（Ⅰ）求a的求值范围．

（Ⅱ）证明：$f(x_2)>\dfrac{1-2\ln 2}{4}$．

【答案】（Ⅰ）$0<a<\dfrac{1}{2}$

（Ⅱ）略

【解析】（Ⅰ）$\because\ f(x)=x^2+a\ln(1+x)$，

$\therefore\ f'(x)=2x+\dfrac{a}{1+x}=\dfrac{2x^2+2x+a}{1+x}$，$(x>-1)$，

令$g(x)=2x^2+2x+a$，则有两个极值点等价于$g(x)$在$(-1,+\infty)$上，

有两个零点，

$$\therefore\ \begin{cases}g\left(-\dfrac{1}{2}\right)<0\\ g(-1)>0\end{cases}\Rightarrow 0<a<\dfrac{1}{2}.$$

（Ⅱ）证明：由（Ⅰ）可知$-\dfrac{1}{2}<x_2<0$，$a=2x_2-2x_2^2$，

$\therefore\ f(x_2)=x_2^2-2x_2(1+x_2)\ln(1+x_2)$，

设$g(t)=t^2-2t(1+t)\ln(1+t)$，$g'(t)=-2(1+2t)\ln(1+t)$，

当$t=-\dfrac{1}{2}$时，$g'(t)=0$；

当$t\in\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$时，$g'(t)>0$，

$\therefore\ g(t)$在区间$\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$上是增函数，

$\therefore\ t\in\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$时，$g(t)>g\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1-2\ln 2}{4}$，

$\therefore\ f(x_2)>\dfrac{1-2\ln 2}{4}$．

20．（本小题满分14分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$．

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的零点及单调区间．

（Ⅱ）求证：曲线 $y=\dfrac{\ln x}{x}$ 存在斜率为6的切线，且切点的纵坐标 $y_0<-1$．

【答案】（Ⅰ）零点为 $(\mathrm{e},0)$，单增区间为 $(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}},+\infty)$，单减区间为 $(0,\mathrm{e}^{\frac{3}{2}})$

（Ⅱ）见解析

【解析】（Ⅰ）∵ $f(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}(x>0)$，$f(\mathrm{e})=0$，零点为 $(\mathrm{e},0)$，

∴ $f'(x)=\dfrac{2\ln x-3}{x^3}(x>0)$，

$f'(x)>0\Rightarrow x>\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$，$f'(x)<0\Rightarrow x<\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$，

∴单增区间为 $(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}},+\infty)$，单减区间为 $(0,\mathrm{e}^{\frac{3}{2}})$．

（Ⅱ）证明：令 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，则 $g'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}x-1\cdot\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}=f(x)$，

∵ $f\left(\dfrac{1}{2}\right)4+4\ln 2>4+4\times\dfrac{1}{2}=6$，$f(\mathrm{e})=0$，

且 $f(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 内是减函数，

∴存在唯一的 $x_0\in\left(\dfrac{1}{2},\mathrm{e}\right)$ 使得 $g'(x_0)=f(x_0)=6$，

当 $x\in[\mathrm{e},+\infty)$ 时，$f(x)\leqslant 0$，

∴ $y=\dfrac{\ln x}{x}$ 存在以 $(x_0,g(x_0))$ 为切点，斜率为6的切线，

由 $g'(x_0)=\dfrac{1-\ln x_0}{x_0^2}=6$ 得：$\ln x_0=1-6x_0^2$，

∴ $g(x_0)=\dfrac{\ln x_0}{x_0}=\dfrac{1-6x_0^2}{x_0}=\dfrac{1}{x_0}-6x_0$，

∵ $x_0>\dfrac{1}{2}$，

∴ $\dfrac{1}{x_0}<2$，$-6x_0<-3$，

∴ $y_0=g(x_0)<-1$．