

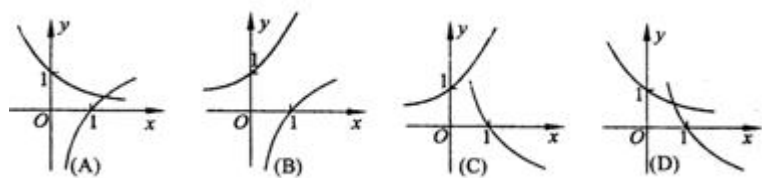
2017 届高二第二学期期末理科数学

第 I 卷（选择题）

一、选择题每小题 5 分，共 60 分

1. 已知集合 $M = \{x|x < 1\}$, $N = \{x|2^x > 1\}$, 则 $M \cap N =$ ()
- A. $\emptyset$ B. $\{x|x < 0\}$ C. $\{x|x < 1\}$ D. $\{x|0 < x < 1\}$
2. 已知命题 p : 若 $x > y$, 则 $-x < -y$; 命题 q : 若 $x < y$, 则 $x^2 > y^2$, 在命题① $p \wedge q$ ② $p \vee q$ ③ $p \wedge (\neg q)$ ④ $(\neg p) \vee q$ 中, 真命题是 ()
- A. ①③ B. ①④ C. ②③ D. ②④
3. 已知命题 $p: \forall x > 0, 2^x > 1$, 则 $\neg p$ 为 ()
- A. $\exists x \leq 0, 2^x \leq 1$ B. $\forall x > 0, 2^x \leq 1$
- C. $\forall x \leq 0, 2^x \leq 1$ D. $\exists x > 0, 2^x \leq 1$
4. 已知 $\vec{a}, \vec{b}$ 是非零向量, 则 “命题 $p: \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$ ” 是 “命题 q : 向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 共线” 的 ()
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
- C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
5. 函数 $y = \sqrt{|x|(x-1)}$ 的定义域为 ()
- A. $\{x|x \geq 1\}$ B. $\{x|x \geq 1 \text{ 或 } x = 0\}$ C. $\{x|x \geq 0\}$ D. $\{x|x = 0\}$
6. 函数 $g(x) = \frac{a}{x+2}$ 在 $[1, 2]$ 上为减函数, 则 a 的取值范围为 ()
- A. $(-\infty, 0)$ B. $[0, +\infty)$ C. $(0, +\infty)$ D. $(-\infty, 0]$
7. 下列函数中既是奇函数, 又在区间 $(0, +\infty)$ 上是单调递减的函数为 ()
- A. $y = \sqrt{x}$ B. $y = -x^3$ C. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ D. $y = x + \frac{1}{x}$
8. 函数 $y = x^3 - 3x - a$ 有三个相异的零点, 则 a 的取值范围是 ()
- A. $[2, +\infty)$ B. $[-2, 2]$ C. $(-2, 2)$ D. $(-\infty, -2]$

9. 在同一坐标系中, 当 $0 < a < 1$ 时, 函数 $y = a^{-x}$ 与 $y = \log_a x$ 的图象是 ()

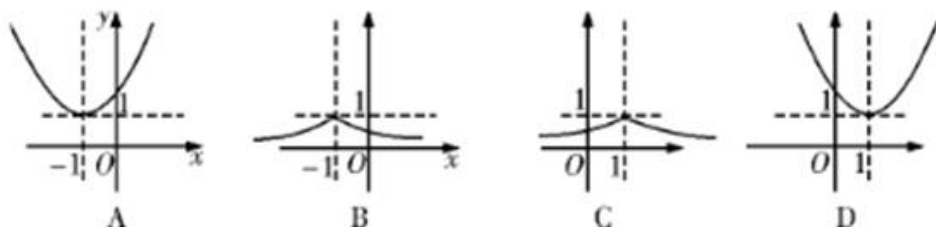


10. $\int_0^3 |x^2 - 4| dx = ()$

- A. $\frac{21}{3}$ B. $\frac{22}{3}$ C. $\frac{23}{3}$ D. $\frac{25}{3}$

11. 已知函数 $f(x) = x - 4 + \frac{9}{x+1}, x \in (0, 4)$, 当 $x = a$ 时, $f(x)$ 取得最小值 b , 则函数

$g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^{|x+b|}$ 的图象为 ()



12. 设函数 $F(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ 是定义在 R 上的函数, 其中 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 满足

$f'(x) < f(x)$ 对于 $x \in R$ 恒成立, 则

- A. $f(2) < e^2 f(0), f(2012) < e^{2012} f(0)$ B. $f(2) > e^2 f(0), f(2012) < e^{2012} f(0)$
C. $f(2) > e^2 f(0), f(2012) > e^{2012} f(0)$ D. $f(2) < e^2 f(0), f(2012) > e^{2012} f(0)$

第 II 卷 (非选择题)

二、填空题每小题 5 分, 共 20 分

13. 命题 “ $\forall x \in [1, 2], \text{使 } x^2 - a \geq 0$ ” 是真命题, 则 a 的范围是_____.

14. 函数 $f(x) = a^{x^2 - 2x - 3}$ ($a > 0, a \neq 1$) 有最小值, 则不等式 $\log_a(x-1) < 0$ 的解集为_____

15. 下列说法:

① “ $\exists x \in \mathbb{R}, 2^x > 3$ ” 的否定是 “ $\forall x \in \mathbb{R}, 2^x \leq 3$ ”； ② 函数 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$

的最小正周期是 π ；

③ 命题 “函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处有极值，则 $f'(x_0) = 0$ ” 的否命题是真命题；

④ $f(x)$ 是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的奇函数， $x > 0$ 时的解析式是 $f(x) = 2^x$ ，则 $x < 0$ 时的解析式为 $f(x) = -2^{-x}$. 其中正确的说法是_____.

16. 稿酬所得以个人每次取得的收入，定额或定率减除规定费用后的余额为应纳税所得额，每次收入不超过 4000 元，定额减除费用 800 元；每次收入在 4000 元以上的，定率减除 20% 的费用. 适用 20% 的比例税率，并按规定对应纳税额减征 30%，计算公式为：

(1) 每次收入不超过 4000 元的：应纳税额 = (每次收入额 - 800) $\times$ 20% $\times$ (1 - 30%)

(2) 每次收入在 4000 元以上的：应纳税额 = 每次收入额 $\times$ (1 - 20%) $\times$ 20% $\times$ (1 - 30%). 已知某人出版一份书稿，共纳税 280 元，这个人应得稿费(扣税前)为_____元.

三、解答题

17. 写出命题 “若 $\sqrt{x-2} + (y+1)^2 = 0$ ，则 $x = 2$ 且 $y = -1$ ” 的逆命题、否命题、逆否命题，并判断它们的真假.

18. 设集合 A 为函数 $y = \ln(-x^2 - 2x + 8)$ 的定义域，集合 B 为函数 $y = x + \frac{1}{x+1}$ 的值域，

集合 C 为不等式 $(ax - \frac{1}{a})(x + 4) \leq 0$ 的解集.

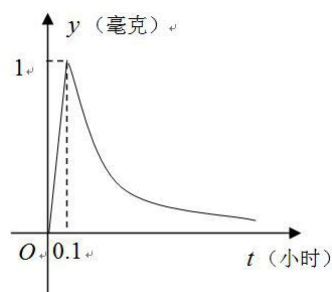
(1) 求 $A \cap B$ ；

(2) 若 $C \subseteq (C_R A)$ ，求 a 的取值范围.

19. 已知 p ：函数 $y = x^2 + mx + 1$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增， q ：函数 $y = 4x^2 + 4(m-2)x + 1$ 大于 0 恒成立. 若 $p \vee q$ 为真， $p \wedge q$ 为假，求 m 的取值范围.

20. 为了预防流感，某学校对教室用药熏消毒法进行消毒. 已知药物释放过程中，室内每立方米空气的含药量 y (毫克) 与时间 t (小时) 成正比. 药物释放完毕后， y 与 t 的函数关系

式为 $y = \left(\frac{1}{16}\right)^{t-a}$ (a 为常数)，如图所示，根据图中提供的信息，回答下列问题：



(1) 求从药物释放开始，每立方米空气中的含药量 y (毫克) 与时间 t (小时) 之间的函数关系式；

(2) 据测定，当空气中每立方米空气的含药量降到 0.25 毫克以下时，学生方可进教室，

那从药物释放开始，至少需要经过多少小时后，学生才能回到进教室？

21. 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ 在 $x = -2$ 与 $x = \frac{1}{2}$ 处都取得极值.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式及单调区间；

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[-3, 2]$ 的最大值与最小值.

22. 已知函数 $f(x) = \ln x + ax$ ($a \in R$).

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 设 $g(x) = x^2 - 4x + 2$ ，若对任意 $x_1 \in (0, +\infty)$ ，均存在 $x_2 \in [0, 1]$ ，使得 $f(x_1) < g(x_2)$ ，求 a 的取值范围.

高二理科数学期末考试参考答案

1. D

【解析】

试题分析： $\because N = \{x | x > 0\}$, $\therefore M \cap N = \{x | 0 < x < 1\}$, 故选 D.

考点：1、指数数不等式；2、集合的交集、并集和补集运算.

【易错点睛】本题主要考查的是指数数不等式和集合的交集、并集和补集运算，属于容易题. 解不等式时一定要注意利用指数函数的单调性或图象解指数不等式，再利用数轴进行集合运算，否则很容易出现错误. 此类题型还可以有特殊值进行检验，比如本题可发现 $x = \frac{1}{2}$ 都是两个集合里的元素，故可以排除 A, B; $x = -1$ 都不是两个集合的元素，故可以排除 C, 这样多种解法可以提高准确率.

2. C

【解析】

试题分析：命题 p 是真命题，命题 q 是假命题，所以 $p \wedge q$ 是假命题， $p \vee q$ 是真命题， $p \wedge (\neg q)$

是真命题， $(\neg p) \vee q$ 是假命题

考点：复合命题

3. D

【解析】

试题分析：命题 $p: \forall x > 0, 2^x > 1$ 是全称命题，否定时将量词对任意的 x 变为 $\exists x$ ，再将不等号 $>$ 变为 $\leq$ 即可. 故选 D.

考点：命题的否定.

4. A

【解析】

试题分析：“命题 $p: \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$ ”能推出“命题 $q: \vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 共线”，而“命题 $q: \vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 共线”不能推出“命题 $p: \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$ ”， $\therefore p$ 是 q 充分不必要条件. 故选 A.

考点：常用逻辑用语.

5. B

【解析】

试题分析：由题意得，函数解析式满足 $|x|(x-1) \geq 0$ ，解得 $x \geq 1$ 或 $x = 0$ ，即函数的定义域为 $\{x | x \geq 1 \text{ 或 } x = 0\}$ ，故选 B.

考点：函数的定义域的求解.

6. C

【解析】

试题分析： $g'(x) = -\frac{a}{(x+2)^2}$ ， $x \in [1, 2]$ ， 令 $g'(x) < 0$ ， 得 $a > 0$ ， 故选 C.

考点：函数的单调性与导数的关系.

7. B

【解析】

试题分析：根据定义域是否关于原点对称可排除选项 A、C，再根据 $y = x + \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上

是先减后增的，可排除 D，故选 B.

考点：1、函数的奇偶性；2、函数的单调性.

【方法点睛】本题是一个关于函数的奇偶性、以及函数的单调性方面的综合性问题，属于容易题. 一般的要判断一个函数的奇偶性其基本思路及切入点是：首先确定这个函数的定义域，如果函数的定义域不是关于原点对称的，那么该函数既不是奇函数也不是偶函数，当定义域关于原点对称的前提下，如果再满足 $f(-x) = f(x)$ ，则 $f(x)$ 是偶函数，如果满足

$f(-x) = -f(x)$ ，则 $f(x)$ 是奇函数.

8. C

【解析】

试题分析： $y' = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$ ，所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, -1)$ ， $(1, +\infty)$ 上单调递增，

在区间 $(-1, 1)$ 上单调递减， $f(x)$ 在 $x = -1$ 处取得极大值，在 $x = 1$ 处取得极小值，依题意

$f(x)$ 有三个零点，即 $\begin{cases} f(-1) = 2 - a > 0 \\ f(1) = -2 - a < 0 \end{cases}$ ，即 $a \in (-2, 2)$.

考点：函数导数与零点问题.

9. C

【解析】

试题分析：由题 $0 < a < 1$ ， $y = a^{-x} = (\frac{1}{a})^x$ ，即： $\frac{1}{a} > 1$ 。指数函数为增函数。

$y = \log_a x$ 为减函数。由指数和对数函数的图像可得，正确为 C

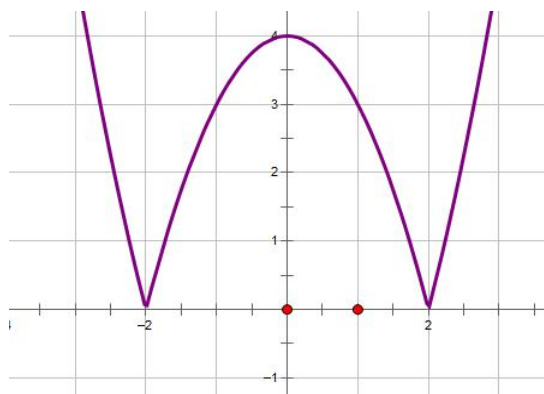
考点：指数和对数函数的图像和性质。

10. C

【解析】

试题分析：画出函数图象如下图所示，可知

$$\int_0^3 |x^2 - 4| dx = \int_0^2 (4 - x^2) dx + \int_2^3 (x^2 - 4) dx = 8 - \frac{8}{3} + (9 - 12 - \frac{8}{3} + 8) = \frac{23}{3}.$$



考点：定积分的几何意义.

11. B

【解析】

试题分析：因为 $0 < x < 4$ ，所以 $1 < x+1 < 5$ ，则 $f(x) = x - 4 + \frac{9}{x+1} = (x+1) + \frac{9}{x+1} - 5 \geq 6 - 5 = 1$ （当且仅当 $x+1 = \frac{9}{x+1}$ ，即 $x = 2$ 时取

等号），即 $a = 2, b = 1$ ，即 $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x+1|} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}, & x \geq -1 \\ 2^{x+1}, & x < -1 \end{cases}$ ，则 $g(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递

减，在 $[-1, +\infty)$ 上单调递增，当 $x = -1$ 时，取得最大值 1；故选 B.

考点：1. 基本不等式；2. 函数的图象与性质.

12. B

【解析】

试题分析：由 $f'(x) < f(x)$ ，知 $F'(x) = \frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{(e^x)^2} = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} < 0$ ，故函数

$F(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ 是定义在 R 上的减函数， $\therefore F(2) < F(0)$ ，即

$\frac{f(2)}{e^2} < \frac{f(0)}{e^0} \Rightarrow f(2) < e^2 f(0)$ ，同理可得 $\frac{f(2012)}{e^{2012}} < \frac{f(0)}{e^0} \Rightarrow f(2012) < e^{2012} f(0)$ ，

故选 B

考点：利用导数研究函数的单调性，导数的运算法则的应用

13. $a \leq 1$

【解析】

试题分析： $x^2 - a \geq 0$ ， $a \leq x^2$ ， $x \in [1, 2]$ 恒成立， $x \in [1, 2]$ 时 $(x^2)_{\min} = 1$ ，所以 $a \leq 1$.

考点：命题的真假，不等式恒成立.

14. $\{x | 1 < x < 2\}$

【解析】

试题分析：当函数先减后增时有最小值，结合复合函数单调性的判定方法可知 $a > 1$ ，所以

不等式 $\log_a(x-1) < 0$ 转化为 $0 < x-1 < 1 \therefore 1 < x < 2$ ，解集为 $\{x | 1 < x < 2\}$

考点：函数单调性与最值

15. ①④

【解析】对于①，“ $\exists x \in \mathbb{R}, 2^x > 3$ ”的否定是“ $\forall x \in \mathbb{R}, 2^x \leq 3$ ”，因此①正确；对于②，注意到 $\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ ，因此函数 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \sin\left(4x + \frac{2\pi}{3}\right)$ ，

则其最小正周期是 $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ ，②不正确；对于③，注意到命题“函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有极值，

则 $f'(x_0)=0$ ”的否命题是“若函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处无极值，则 $f'(x_0) \neq 0$ ”，容易知该命题不正确，如取 $f(x)=x^3$ ，当 $x_0=0$ 时，③不正确；对于④，依题意知，当 $x < 0$ 时， $-x > 0$ ， $f(x) = -f(-x) = -2^{-x}$ ，因此④正确

16. 2800

【解析】

试题分析：由题可知，当纳税 280 元时，代入第一个计算公式中，可得出 $280 = (\text{每次收入额} - 800) \times 20\% \times (1 - 30\%)$ ，此时每次收入额为 2800 元，因为 $2800 < 4000$ ，故满足题意，而代入到第二个计算公式中，得到

$280 = \text{每次收入额} \times (1 - 20\%) \times 20\% \times (1 - 30\%)$ ，此时每次收入额为 2500 元，因为

$2500 < 4000$ ，故不满足题意，舍去；

考点：分段函数的取值范围

17. 详见解析

【解析】

试题分析：原命题的逆命题需将条件和结论加以交换，否命题需将条件与结论分别否定，逆否命题需将条件和结论否定后并交换

试题解析：逆命题：若 $x = 2$ 且 $y = -1$ ，则 $\sqrt{x-2} + (y+1)^2 = 0$ ；真命题

否命题：若 $\sqrt{x-2} + (y+1)^2 \neq 0$ ，则 $x \neq 2$ 或 $y \neq -1$ ；真命题

逆否命题：若 $x \neq 2$ 或 $y \neq -1$ ，则 $\sqrt{x-2} + (y+1)^2 \neq 0$ ；真命题

考点：四种命题

18. (1) $(-4, -3] \cup [1, 2)$ ；(2) $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq a < 0$.

【解析】

试题分析：(1) 分别求出函数 $y = \ln(-x^2 - 2x + 8)$ 的定义域及函数 $y = x + \frac{1}{x+1}$ 的值域，可

得集合 A 和 B ，再取交集；(2) 由 (1) 得 $C_R A = (-\infty, -4] \cup [2, +\infty)$ ，又由 $C \subseteq (C_R A)$ 知集

合 C 中所有元素都在区间 $(-\infty, -4] \cup [2, +\infty)$ 内，得 $a < 0$ ，则 $C = \{x | x \leq -4 \text{ 或 } x \geq \frac{1}{a^2}\}$ ，借

助数轴可得 $\frac{1}{a^2} \geq 2$ ，解得 $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq a < 0$ 。

试题解析：（1）由已知，解得 $A = (-4, 2)$ ， $B = (-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$ ， $\therefore$
 $A \cap B = (-4, -3] \cup [1, 2)$ 。

（2）由（1）得 $C_R A = (-\infty, -4] \cup [2, +\infty)$ ，若 $a > 0$ ，则 $C = \{x \mid -4 \leq x \leq \frac{1}{a^2}\}$ ，可知 $C \subseteq (C_R A)$ 不成立，故 $a < 0$ ，此时 $C = \{x \mid x \leq -4 \text{ 或 } x \geq \frac{1}{a^2}\}$ ， $\therefore$ 当 $\frac{1}{a^2} \geq 2$ 时，满足题意，故 a 的取值范围 $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq a < 0$ 。

考点：1、函数定义域、值域；2、解二次不等式；3、集合运算。

19. m 的取值范围是 $\{m \mid m \geq 3 \text{ 或 } 1 < m < 2\}$

【解析】

试题分析：本题是一个由命题的真假得出参数所满足的条件，通过解方程或不等式求参数范围的题，宜先对两个命题 p ， q 进行转化得出其为真时参数的取值范围，再由 $p \vee q$ 为真， $p \wedge q$ 为假的关系求出参数的取值范围，在命题 p 中，用二次函数的性质进行转化，在命题 q 中，用二次函数的性质转化。

解：若函数 $y = x^2 + mx + 1$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增，则 $-\frac{m}{2} \leq -1$ ，

$\therefore m \geq 2$ ，即 $p: m \geq 2$

若函数 $y = 4x^2 + 4(m-2)x + 1$ 大于 0 恒成立，则 $\Delta = 16(m-2)^2 - 16 < 0$ ，
解得 $1 < m < 3$ ，

即 $q: 1 < m < 3$

$\because p \vee q$ 为真， $p \wedge q$ 为假， $\therefore p$ 、 q 一真一假

当 p 真 q 假时，由 $\begin{cases} m \geq 2 \\ m \geq 3 \text{ 或 } m \leq 1 \end{cases}$ 得 $m \geq 3$

当 p 假 q 真时，由 $\begin{cases} m < 2 \\ 1 < m < 3 \end{cases}$ 得 $1 < m < 2$

综上， m 的取值范围是 $\{m \mid m \geq 3 \text{ 或 } 1 < m < 2\}$

考点：命题的真假判断与应用。

20. (1) $y = \begin{cases} 10t, & \left(0 \leq t \leq \frac{1}{10}\right), \\ \left(\frac{1}{16}\right)^{t-\frac{1}{10}}, & \left(t > \frac{1}{10}\right) \end{cases}$ (2) 至少需要经过 0.6 小时后，学生才能回到进教室

【解析】

试题分析：（1）利用函数图象，借助于待定系数法，求出函数解析法，进而发现函数性质；
（2）根据函数解析式，挖掘其性质解决实际问题

试题解析：（1）从图中可以看出线段的端点分别为 $(0, 0)$ ， $(0.1, 1)$ 当 $0 \leq t \leq 0.1$ 时，因为室内

每立方米空气的含药量 y (毫克) 与时间 t (小时) 成正比. 设 $y = kt$, 图象过点 $(0.1, 1)$ 则 $y = 10t$

点 $(0.1, 1)$ 也在 $y = \left(\frac{1}{16}\right)^{t-a}$ 上, 故 $a = 0.1$, 当 $t > 0.1$ 时, $y = \left(\frac{1}{16}\right)^{t-0.1}$;

$$\text{故 } y = \begin{cases} 10t, & \left(0 \leq t \leq \frac{1}{10}\right), \\ \left(\frac{1}{16}\right)^{t-\frac{1}{10}}, & \left(t > \frac{1}{10}\right) \end{cases}$$

(2) 显然 $t > 0.1$, 设 $\left(\frac{1}{16}\right)^{t-0.1} \leq 0.25$,

$$\text{得 } \left(\frac{1}{16}\right)^{t-0.1} \leq \frac{1}{4}, \therefore \left(\frac{1}{4}\right)^{2t-0.2} \leq \frac{1}{4}$$

$$2t - 0.2 \geq 1, t \geq 0.6,$$

故从药物释放开始, 至少需要经过 0.6 小时后, 学生才能回到进教室。

考点: 分段函数的解析式求法及其图象的作法; 分段函数的应用

21. (1) $f(x) = x^3 + \frac{9}{4}x^2 - 3x$, 单调增区间是 $(-\infty, -2)$, $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$, 减区间是 $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$; (2)

$$f(x)_{\max} = 11, f(x)_{\min} = \frac{13}{16}.$$

【解析】

试题分析: (1) 利用函数 $f(x)$ 在 $x = -2$ 与 $x = \frac{1}{2}$ 处都取得极值, 得 $f'(-2) = 0$, $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, 算

出 a, b 的值; 对 $f(x)$ 求导, 分别令 $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$ 求出范围, 得到单调区间; (2) 求

出函数 $f(x)$ 在区间 $[-3, 2]$ 上的极值和端点处的函数值, 比较它们的大小, 最大的为最大值,

最小的为最小值.

试题解析: 解: (1) 因为 $f(x) = x^3 + bx^2 + cx$, 所以 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$$\text{由 } \begin{cases} f'(-2) = 0 \\ f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{9}{4} \\ b = -3 \end{cases},$$

$$\therefore f(x) = x^3 + \frac{9}{4}x^2 - 3x, f'(x) = 3x^2 + \frac{9}{2}x - 3 = \frac{3}{2}(2x-1)(x+2)$$

令 $f'(x) > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$ 或 $x < -2$, $f'(x) < 0 \Rightarrow -2 < x < \frac{1}{2}$, 所以单调增区间是

$$(-\infty, -2), \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

减区间是 $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$;

(2) 由 (1) 可知, 极值 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{16}$, $f(-2) = 7, f(-3) = \frac{9}{4}, f(2) = 11$, 可得

$$f(x)_{\max} = 11, f(x)_{\min} = \frac{13}{16}.$$

考点: 1. 函数极值的性质; 2. 求函数在某一闭区间上的最值.

22. (1) ①当 $a \geq 0$ 时, $(0, +\infty)$; ②当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, -\frac{1}{a})$, 单调递

减区间为 $(-\frac{1}{a}, +\infty)$; (2) $(-\infty, -\frac{1}{e^3})$.

【解析】

试题分析: (1) 先确定函数的定义域, 再求导, 讨论 a 的取值, 得到函数的单调区间; (2) 先确定 $g(x)$ 的取值范围, 求出最大值, 将问题转化为较简单的恒成立问题, 再由单调性求 a 的取值范围.

试题解析: (1) $f'(x) = a + \frac{1}{x} = \frac{ax+1}{x}$ ($x > 0$)

①当 $a \geq 0$ 时, 由于 $x > 0$, 故 $ax+1 > 0$,

$f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$

②当 $a < 0$ 时, 由 $f'(x) = 0$, 得 $x = -\frac{1}{a}$

在区间 $(0, -\frac{1}{a})$ 上, $f'(x) > 0$, 在区间 $(-\frac{1}{a}, +\infty)$ 上, $f'(x) < 0$, 所以函数 $f(x)$ 的单调递增

区间为 $(0, -\frac{1}{a})$,

单调递减区间为 $(-\frac{1}{a}, +\infty)$;

(2) 由题意得 $f(x)_{\max} < g(x)_{\max}$, 而 $g(x)_{\max} = 2$,

由 (1) 知, 当 $a \geq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 值域为 R , 故不符合题意.

当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, -\frac{1}{a})$ 上单调递增, 在 $(-\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递减,

故 $f(x)$ 的极大值即为最大值, $f(-\frac{1}{a}) = -1 + \ln(-\frac{1}{a}) = -1 - \ln(-a)$, 所以 $2 > -1 - \ln(-a)$,

解得 $a < -\frac{1}{e^3}$,

故 a 的取值范围为 $(-\infty, -\frac{1}{e^3})$.

考点: 利用导数求闭区间上最值; 利用导数研究函数的性质.

【方法点睛】求一个函数在闭区间上的最值和无穷区间(或开区间)上的最值时, 方法是不

同的. 求函数在无穷区间(或开区间)上的最值, 不仅要研究其极值情况, 还要研究其单调性, 并通过单调性和极值情况, 画出函数的大致图象, 然后借助图象观察得到函数的最值.