

2017 年元月高三年级调研考试

理科试题

2017 年元月 9 日

第 I 卷（选择题）

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每个小题给出的四个选项中，有且只有一项符合题目要求.

1. 设复数 $z_1 = 1-i, z_2 = 1+i$ ，其中 i 是虚数单位，则 $\frac{z_1}{z_2}$ 的模为

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

2. 下列说法正确的是

A. “若 $a > 1$ ，则 $a^2 > 1$ ” 的否命题是 “若 $a > 1$ ，则 $a^2 \leq 1$ ”

B. 在 $\triangle ABC$ 中，“ $A > B$ ” 是 “ $\sin^2 A > \sin^2 B$ ” 必要不充分条件

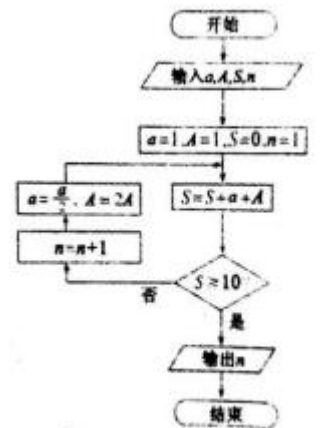
C. “若 $\tan \alpha \neq \sqrt{3}$ ，则 $\alpha \neq \frac{\pi}{3}$ ” 是真命题

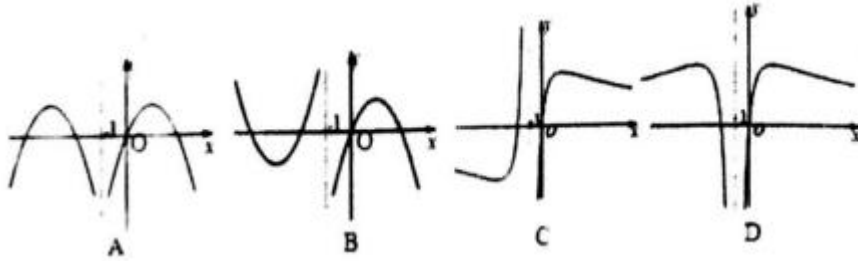
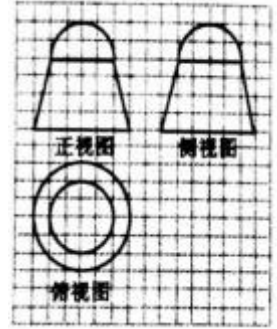
D. $\exists x_0 \in (-\infty, 0)$ 使得 $3^{x_0} < 4^{x_0}$ 成立

3. 我国古代数学典籍《九章算术》“盈不足”中有一道两鼠穿墙问题：“今有垣厚十尺，两鼠对穿，初日各一尺，大鼠日自倍，小鼠日自半，问几何日相逢？”现有程序框图描述，如图所示，则输出结果 $n =$

- A. 4 B. 5 C. 2 D. 3

4. 下列四个图中，函数 $y = \frac{\ln|x+1|}{x+1}$ 的图象可能是





5. 设实数 x, y 满足 $\begin{cases} y \leq 2x - 2 \\ x + y - 2 \geq 0 \\ x \leq 2 \end{cases}$, 则 $\frac{y-1}{x+3}$ 的取值范围是

- A. $\left(-\infty, -\frac{1}{5}\right]$ B. $\left[-\frac{1}{5}, 1\right]$ C. $\left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right]$ D. $\left(\frac{1}{3}, 1\right]$

6. 如图, 网格纸上正方形小格的边长为 1, 图中粗线画的是某几何体的三视图, 则该几何体的表面积为 S 为 $S = \pi(R+r)l$ (注: 圆台侧面积公式为)

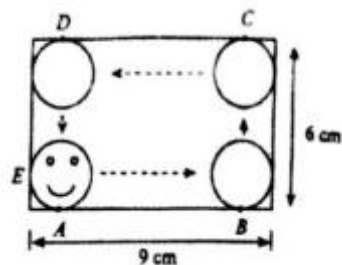
- A. $17\pi + 3\sqrt{17}\pi$ B. $20\pi + 5\sqrt{17}\pi$ C. 22π D. $17\pi + 5\sqrt{17}\pi$

7. 已知 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心为 O , 半径为 2, 且 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$, 则向量 $\overrightarrow{CA}$ 在向量 $\overrightarrow{CB}$ 方向上的投影为

- A. 3 B. $\sqrt{3}$ C. -3 D. $-\sqrt{3}$

8. 在正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 若 $AB = \sqrt{2}BB_1$, 则 AB_1 与 BC_1 所成角的大小为

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{5\pi}{12}$ D. $\frac{\pi}{2}$



9. 已知函数 $y = \sin(\pi x + \varphi) - 2\cos(\pi x + \varphi)$ ($0 < \varphi < \pi$) 的图象关于直线

$x = 1$ 对称, 则 $\sin 2\varphi =$

- A. $\frac{3}{5}$ B. $-\frac{3}{5}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $-\frac{4}{5}$

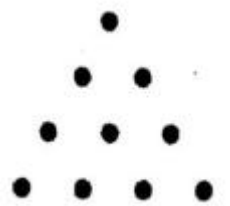
10. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数, $f(x+1)$ 为奇函数, $f(0) = 0$, 当 $x \in (0, 1]$ 时,

$f(x) = \log_2 x$, 则在区间 $(8, 9)$ 内满足方程 $f(x) + 2 = f\left(\frac{1}{2}\right)$ 的实数 x 为

- A. $\frac{17}{2}$ B. $\frac{65}{8}$ C. $\frac{33}{4}$ D. $\frac{67}{8}$

11. 如图, 给定由 10 个点 (任意相邻两点距离为 1,) 组成的正三角形点阵, 在其中任意取三个点, 以这三个点为顶点构成的正三角形的个数是

- A. 12 B. 13 C. 15 D. 16



12. 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{1+x} - \ln x$, $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得最大值, 以下各式中: ①

$f(x_0) < x_0$ ② $f(x_0) = x_0$ ③ $f(x_0) > x_0$ ④ $f(x_0) < \frac{1}{2}$ ⑤ $f(x_0) > \frac{1}{2}$

正确的序号是

- A. ②④ B. ②⑤ C. ①④ D. ③⑤

第 II 卷 (非选择题)

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x-2, & x \geq 1 \\ 2, & x < 1 \end{cases}$, 则满足 $xf(x-1) \geq 10$ 的 x 取值范围为_____.

14. 多项式 $(a+2b-3c)^6$ 的展开式中 ab^2c^3 的系数为_____. (用数字作答)

15. 有一个电动玩具, 它有一个 9×6 的长方形 (单位: cm) 和一个半径为 1cm 的小圆盘 (盘中娃娃脸), 他们的连接点为 A, E, 打开电源, 小圆盘沿着长方形内壁, 从点 A 出发不停地滚动 (无滑动), 如图所示, 若此时某人向该长方形盘投掷一枚飞镖, 则能射中小圆盘运行区域内的概率为_____.

16. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2, a_2 = 6$, 且 $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2$, 若 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整

数, 则 $\left[\frac{2017}{a_1} + \frac{2017}{a_2} + \cdots + \frac{2017}{a_{2017}} \right] =$ _____.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分.解答应写出必要的文字说明或推理、验算过程.

17. (本题满分 10 分)

已知函数 $f(x) = x^2 - 1, g(x) = a|x - 1|$.

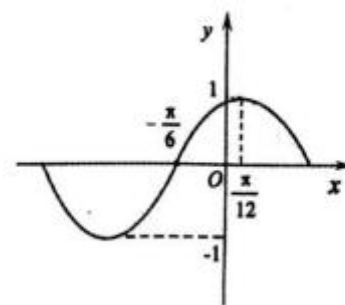
(1) 若关于 x 的方程 $|f(x)| = g(x)$ 只有一个实数解，求实数 a 的取值范围；

(2) 若当 $x \in R$ 时，不等式 $f(x) \geq G(X)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

18. (本题满分 12 分)

函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图像如图所示，将

$y = f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度后得到函数 $y = g(x)$ 的图象.



(1) 求函数 $y = g(x)$ 的解析式；

(2) 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 满足 $2\sin^2 \frac{A+B}{2} = g\left(C + \frac{\pi}{3}\right) + 1$ ，且

其外接圆的半径 $R=2$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积的最大值.

19. (本题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = -a_n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2$ ， n 为正整数.

(1) 令 $b_n = 2^n a_n$ ，求证：数列 $\{b_n\}$ 为等差数列，并求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 令 $c_n = \frac{n+1}{n} a_n, T_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$ ，求 T_n .

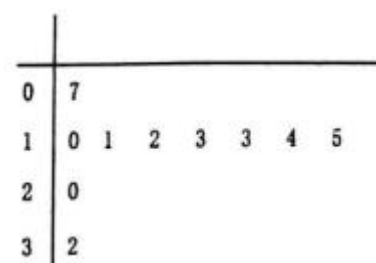
20. (本题满分 12 分) 为了引导居民合理用水，某市决定全面实施阶梯水价，阶梯水价原则上以住宅（一套住宅为一户）的月用水量为基础定价，具体划分标准如下表：

阶梯级别	第一阶梯水量	第二阶梯水量	第三阶梯水量
月用水量范围(单位:立方米)	$(0, 10]$	$(10, 15]$	$(15, +\infty)$

从本市随机抽取了 10 户家庭，统计了同一个月的用水量，得到右边的茎叶图：

(1) 现要在这 10 户家庭中任意选取 3 户，求取到第二阶梯水量的户数的分布列和数学期望；

(2) 用抽到的 10 户家庭作为样本估计全市的居民用水情况，从全

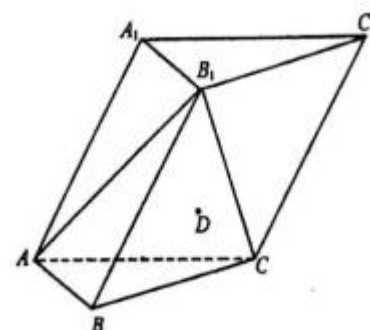


市依次随机抽取 10 户，若抽到 n 户月用水量为第二阶梯水量的可能性最大，求出 n 的值。

21. (本题满分 12 分) 如图，在各棱长均为 2 的三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 $A_1ACC_1 \perp$ 底面 ABC ， $\angle A_1AC = 60^\circ$ 。

(1) 求侧棱 AA_1 与平面 AB_1C 所成角的正弦值的大小；

(2) 已知点 D 满足 $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ ，在直线 AA_1 上是否存在点 P ，使 $DP \parallel$ 平面 AB_1C ？若存在，请确定点 P 的位置，若不存在，请说明理由。



22. (本题满分 12 分) 已知函数 $f(x) = x \ln x - \frac{a}{2}x^2 - x + a$ ($a \in \mathbb{R}$) 在定义域内有两个不同的极值点。

(1) 求实数 a 的取值范围；

(2) 记两个极值点为 x_1, x_2 ，且 $x_1 < x_2$ ，已知 $\lambda > 0$ ，若不等式 $x \cdot x_2^\lambda > e^{1+\lambda}$ 恒成立，求 λ 的取值范围。

一、选择题 1-12 DCACB DBDDDB CA

二、填空题： 13. $[5, +\infty)$ 14. -6480 15. $\frac{40+\pi}{50}$ 16. 2016

三：解答题 17. 解：(I) 方程 $|f(x)| = g(x)$ ，即 $|x^2 - 1| = a|x - 1|$ ，变形得 $|x - 1|(|x + 1| - a) = 0$ ，显然， $x = 1$ 已是该方程的根，从而欲使原方程只有一解，即要求方程 $|x + 1| = a$ 有

且仅有一个等于 1 的解或无解, $\therefore a < 0$5 分

(II) 当 $x \in R$ 时, 不等式 $f(x) \geq g(x)$ 恒成立, 即 $(x^2 - 1) \geq a|x - 1|$ (*) 对 $x \in R$ 恒成立,

①当 $x=1$ 时, (*) 显然成立, 此时 $a \in R$;

②当 $x \neq 1$ 时, (*) 可变形为 $a \leq \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$,

$$\text{令 } \phi(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} = \begin{cases} x+1, & x > 1 \\ -(x+1), & x < 1 \end{cases}$$

因为当 $x > 1$ 时, $\phi(x) > 2$, 当 $x < 1$ 时, $\phi(x) > -2$, 所以 $\phi(x) > -2$, 故此时 $a \leq -2$.

综合①②, 得所求实数 a 的取值范围是 $a \leq -2$10 分

$$18. (I) \text{ 由图知 } \frac{2\pi}{\omega} = 4\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6}\right), \text{ 解得 } \omega = 2$$

$$\because f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{12} + \varphi\right) = 1$$

$$\therefore \frac{\pi}{6} + \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in Z), \text{ 即 } \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{3} (k \in Z)$$

由于 $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, 因此 $\varphi = \frac{\pi}{3}$ 3 分

$$\therefore f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\therefore f\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$$

即函数 $y = g(x)$ 的解析式为 $g(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 6 分

$$(II) \because 2\sin^2 \frac{A+B}{2} = g\left(C + \frac{\pi}{3}\right) + 1$$

$$\therefore 1 - \cos(A+B) = 1 + \sin\left(2C + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\because \cos(A+B) = -\cos C, \sin(2C + \frac{\pi}{2}) = \cos 2C$$

$$\cos C = \cos 2C, \text{ 即 } \cos C = 2\cos^2 C - 1, \text{ 所以 } \cos C = -\frac{1}{2} \text{ 或 } 1 \text{ (舍)}, C = \frac{2}{3}\pi \dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{由正弦定理得 } \frac{c}{\sin C} = 2R = 4, \text{ 解得 } c = 2\sqrt{3}$$

$$\text{由余弦定理得 } \cos C = -\frac{1}{2} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 12 - ab \geq 2ab, ab \leq 4 \text{ (当且仅当 } a=b \text{ 等号成立)}$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{\sqrt{3}}{4}ab \leq \sqrt{3}$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的面积最大值为 } \sqrt{3}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$19. \text{解: (I) 在 } S_n = -a_n - (\frac{1}{2})^{n-1} + 2 \text{ 中, 令 } n=1, \text{ 可得 } S_1 = -a_1 - 1 + 2 = a_1, \text{ 即 } a_1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } S_{n-1} = -a_{n-1} - (\frac{1}{2})^{n-2} + 2, \therefore a_n = S_n - S_{n-1} = -a_n + a_{n-1} + (\frac{1}{2})^{n-1},$$

$$\therefore 2a_n = a_{n-1} + (\frac{1}{2})^{n-1}, \text{ 即 } 2^n a_n = 2^{n-1} a_{n-1} + 1$$

$$\therefore b_n = 2^n a_n, \therefore b_n = b_{n-1} + 1, \text{ 即当 } n \geq 2 \text{ 时, } b_n - b_{n-1} = 1.$$

$$\text{又 } b_1 = 2a_1 = 1, \therefore \text{数列 } \{b_n\} \text{ 是首项和公差均为 } 1 \text{ 的等差数列.}$$

$$\text{于是 } b_n = 1 + (n-1) \cdot 1 = n = 2^n a_n, \therefore a_n = \frac{n}{2^n}. \dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(II) \quad \text{由} \quad (I) \quad \text{得} \quad c_n = \frac{n+1}{n} a_n = (n+1) (\frac{1}{2})^n, \quad \text{所以}$$

$$T_n = 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times (\frac{1}{2})^2 + 4 \times (\frac{1}{2})^3 + \dots + (n+1) (\frac{1}{2})^n$$

$$\frac{1}{2} T_n = 2 \times (\frac{1}{2})^2 + 3 \times (\frac{1}{2})^3 + 4 \times (\frac{1}{2})^4 + \dots + (n+1) (\frac{1}{2})^{n+1}$$

$$\begin{aligned}
 \text{由①-②得 } \frac{1}{2}T_n &= 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n - (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\
 &= 1 + \frac{\frac{1}{4}[1 - (\frac{1}{2})^{n+1}]}{1 - \frac{1}{2}} - (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{3}{2} - \frac{n+3}{2^{n+1}} \therefore T_n = 3 - \frac{n+3}{2^n} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}
 \end{aligned}$$

20. 解：（1）由茎叶图可知抽取的 10 户中用水量为一阶的有 2 户，二阶的有 6 户，三阶的有 2 户。

第二阶梯水量的户数 X 的可能取值为 0, 1, 2, 31 分

$$P(X=0) = \frac{C_4^3 \cdot C_6^0}{C_{10}^3} = \frac{1}{30}, \quad P(X=1) = \frac{C_4^2 \cdot C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{3}{10}$$

$$P(X=2) = \frac{C_4^1 \cdot C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{1}{2}, \quad P(X=3) = \frac{C_4^0 \cdot C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{6}$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

.....5 分

$$EX = 0 \times \frac{1}{30} + 1 \times \frac{3}{10} + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{9}{5} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

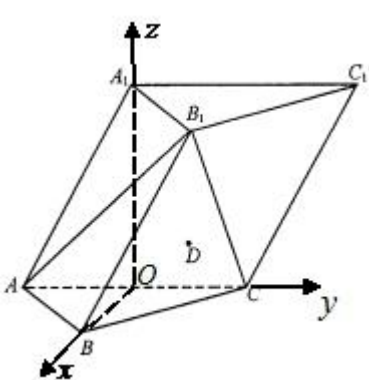
(2) 设 Y 为从全市抽取的 10 户中用水量为二阶的家庭户数，依题意得 $Y \sim B(10, \frac{3}{5})$,

所以 $P(Y=k) = C_{10}^k \left(\frac{3}{5}\right)^k \left(\frac{2}{5}\right)^{10-k}$, 其中 $k=0,1,2,\dots,10$ 8 分

$$\text{设 } t = \frac{P(Y=k)}{P(Y=k-1)} = \frac{C_{10}^k \left(\frac{3}{5}\right)^k \left(\frac{2}{5}\right)^{10-k}}{C_{10}^{k-1} \left(\frac{3}{5}\right)^{k-1} \left(\frac{2}{5}\right)^{11-k}} = \frac{3(11-k)}{2k} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

若 $t > 1$, 则 $k < 6.6$, $P(Y=k-1) < P(Y=k)$;

若 $t < 1$, 则 $k > 6.6$, $P(Y=k-1) > P(Y=k)$ 。



所以当 $k=6$ 或 7 , $P(Y=k)$ 可能最大, $\frac{P(Y=6)}{P(Y=7)} = \frac{C_n^6 (\frac{3}{5})^6 (\frac{2}{5})^4}{C_n^7 (\frac{3}{5})^7 (\frac{2}{5})^3} = \frac{7}{6} > 1$

所以 n 的取值为 6.12 分

21. 解: (1) $\because$ 侧面 $A_1ACC_1 \perp$ 底面 ABC , 作 $A_1O \perp AC$ 于点 O , $\therefore A_1O \perp$ 平面 ABC .

又 $\angle ABC = \angle A_1AC = 60^\circ$, 且各棱长都相等,

$\therefore AO = 1, OA_1 = OB = \sqrt{3}, BO \perp AC$2 分

故以 O 为坐标原点, 建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$, 则

$A(0, -1, 0), B(\sqrt{3}, 0, 0), A_1(0, 0, \sqrt{3}), C(0, 1, 0),$

$\therefore \overrightarrow{AA_1} = (0, 1, \sqrt{3}), \overrightarrow{AB_1} = (\sqrt{3}, 2, \sqrt{3}), \overrightarrow{AC} = (0, 2, 0)$4 分

设平面 AB_1C 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, 1)$,

则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB_1} = \sqrt{3}x + 2y + \sqrt{3} \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 2y = 0 \end{cases}$, 解得 $\vec{n} = (-1, 0, 1)$. 由 $\cos \langle \overrightarrow{AA_1}, \vec{n} \rangle = \frac{|\overrightarrow{AA_1} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{AA_1}| |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

而侧棱 AA_1 与平面 AB_1C 所成角, 即是向量 $\overrightarrow{AA_1}$ 与平面 AB_1C 的法向量所成锐角的余角,

$\therefore$ 侧棱 AA_1 与平面 AB_1C 所成角的正弦值的大小为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$ 6 分

(2) $\because \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$, 而 $\overrightarrow{BA} = (-\sqrt{3}, -1, 0), \overrightarrow{BC} = (-\sqrt{3}, 1, 0)$.

$\therefore \overrightarrow{BD} = (-2\sqrt{3}, 0, 0)$ 又 $\because B(\sqrt{3}, 0, 0)$, $\therefore$ 点 D 的坐标为 $D(-\sqrt{3}, 0, 0)$.

假设存在点 P 符合题意, 则点 P 的坐标可设为 $P(0, y, z)$, $\therefore \overrightarrow{DP} = (\sqrt{3}, y, z)$.

$\because DP \parallel$ 平面 AB_1C , $\vec{n} = (-1, 0, 1)$ 为平面 AB_1C 的法向量,

$\therefore$ 由 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AA_1}$, 得 $\begin{cases} y+1 = \lambda \\ \sqrt{3} = \lambda \sqrt{3} \end{cases} \therefore y = 0$10 分

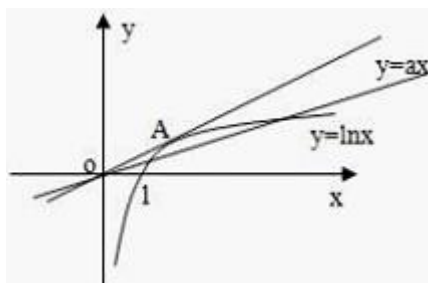
又 $DP \not\subset$ 平面 AB_1C , 故存在点 P , 使 $DP \parallel$ 平面 AB_1C , 其坐标为 $(0, 0, \sqrt{3})$,

即恰好为 A_1 点.12 分

22. 解: (I) 由题意知, 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 方程 $f'(x)=0$ 在 $(0, +\infty)$ 有两个不同根; 即方程 $\ln x - ax=0$ 在 $(0, +\infty)$ 有两个不同根;

(解法一) 转化为函数 $y=\ln x$ 与函数 $y=ax$ 的图象在 $(0, +\infty)$ 上有两个不同交点,

如右图.



可见, 若令过原点且切于函数 $y=\ln x$ 图象的直线斜率为 k , 只须 $0 < a < k$.

令切点 $A(x_0, \ln x_0)$, 故 $k=y'|_{x=x_0} = \frac{1}{x_0}$, 又 $k = \frac{\ln x_0}{x_0}$, 故 $\frac{1}{x_0} = \frac{\ln x_0}{x_0}$, 解得, $x_0=e$, 故

$k = \frac{1}{e}$, 故 $0 < a < \frac{1}{e}$4 分

(解法二) 转化为函数 $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ 与函数 $y=a$ 的图象在 $(0, +\infty)$ 上有两个不同交点.

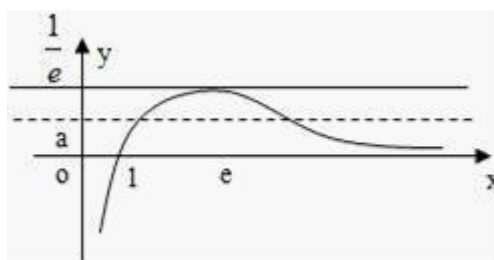
$$\text{又 } g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

即 $0 < x < e$ 时, $g'(x) > 0$, $x > e$ 时, $g'(x) < 0$, 故 $g(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调增,

在 $(e, +\infty)$ 上单调减. 故 $g(x)$ 极大 $= g(e) = \frac{1}{e}$;

又 $g(x)$ 有且只有一个零点是 1, 且在 $x \rightarrow 0$ 时, $g(x) \rightarrow -\infty$, 在 $x \rightarrow +\infty$ 时, $g(x) \rightarrow 0$,

故 $g(x)$ 的草图如右图,



可见, 要想函数 $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ 与函数 $y=a$ 的图象在 $(0, +\infty)$ 上有两个不同交点,

只须 $0 < a < \frac{1}{e}$4 分

(解法三) 令 $g(x) = \ln x - ax$, 从而转化为函数 $g(x)$ 有两个不同零点,

$$\text{而 } g'(x) = \frac{1}{x} - a = \frac{1-ax}{x} \quad (x>0),$$

若 $a \leq 0$, 可见 $g'(x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调增,

此时 $g(x)$ 不可能有两个不同零点.

若 $a > 0$, 在 $0 < x < \frac{1}{a}$ 时, $g'(x) > 0$, 在 $x > \frac{1}{a}$ 时, $g'(x) < 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上单调增, 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调减, 从而

$$g(x)_{\text{极大}} = g\left(\frac{1}{a}\right) = \ln \frac{1}{a} - 1,$$

又因为在 $x \rightarrow 0$ 时, $g(x) \rightarrow -\infty$, 在 $x \rightarrow +\infty$ 时, $g(x) \rightarrow -\infty$,

于是只须: $g(x)_{\text{极大}} > 0$, 即 $\ln \frac{1}{a} - 1 > 0$, 所以 $0 < a < \frac{1}{e}$.

综上所述, $0 < a < \frac{1}{e}$4分

(II) 因为 $e^{1+\lambda} < x_1 \cdot x_2^\lambda$ 等价于 $1+\lambda < \ln x_1 + \lambda \ln x_2$.

由 (I) 可知 x_1, x_2 分别是方程 $\ln x - ax = 0$ 的两个根,

$$\text{即 } \ln x_1 = ax_1, \quad \ln x_2 = ax_2$$

所以原式等价于 $1+\lambda < ax_1 + \lambda ax_2 = a(x_1 + \lambda x_2)$, 因为 $\lambda > 0, 0 < x_1 < x_2$,

$$\text{所以原式等价于 } a > \frac{1+\lambda}{x_1 + \lambda x_2}.$$

$$\text{又由 } \ln x_1 = ax_1, \quad \ln x_2 = ax_2 \text{ 作差得, } \ln \frac{x_1}{x_2} = a(x_1 - x_2), \text{ 即 } a = \frac{\ln \frac{x_1}{x_2}}{x_1 - x_2}.$$

$$\text{所以原式等价于 } \frac{\ln \frac{x_1}{x_2}}{x_1 - x_2} > \frac{1+\lambda}{x_1 + \lambda x_2},$$

$$\text{因为 } 0 < x_1 < x_2, \text{ 原式恒成立, 即 } \ln \frac{x_1}{x_2} < \frac{(1+\lambda)(x_1 - x_2)}{x_1 + \lambda x_2} \text{ 恒成立.}$$

令 $t = \frac{x_1}{x_2}$, $t \in (0, 1)$,

则不等式 $\ln t < \frac{(1+\lambda)(t-1)}{t+\lambda}$ 在 $t \in (0, 1)$ 上恒成立.8分

令 $h(t) = \ln t - \frac{(1+\lambda)(t-1)}{t+\lambda}$,

又 $h'(t) = \frac{1}{t} - \frac{(1+\lambda)^2(t-1)(t-\lambda^2)}{t(t+\lambda)^2}$,

当 $\lambda^2 \geq 1$ 时, 可见 $t \in (0, 1)$ 时, $h'(t) > 0$,

所以 $h(t)$ 在 $t \in (0, 1)$ 上单调增, 又 $h(1) = 0$, $h(t) < 0$ 在 $t \in (0, 1)$ 恒成立, 符合题意.

当 $\lambda^2 < 1$ 时, 可见 $t \in (0, \lambda^2)$ 时, $h'(t) > 0$, $t \in (\lambda^2, 1)$ 时 $h'(t) < 0$,

所以 $h(t)$ 在 $t \in (0, \lambda^2)$ 时单调增, 在 $t \in (\lambda^2, 1)$ 时单调减, 又 $h(1) = 0$,

所以 $h(t)$ 在 $t \in (0, 1)$ 上不能恒小于 0, 不符合题意, 舍去.

综上所述, 若不等式 $e^{1+\lambda} < x_1 \cdot x_2^\lambda$ 恒成立, 只须 $\lambda^2 \geq 1$, 又 $\lambda > 0$, 所以 $\lambda \geq 1$12

分