绝密★启用前

2017—2018学年高二年级阶段性测试(一)

数学(理科)

考生注意:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上,并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知$\triangle ABC$的内角A,B,C所对的边长分别为4,5,6,则$\cos C=$

A. $\frac{9}{16}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{1}{8}$　　D. $\frac{1}{10}$

2. 若$a,b,c\in\mathbf{R}$,且$a>b$,则下列不等式成立的是

A. $\frac{c}{a}>\frac{c}{b}$　　B. $\frac{c^2}{a-b}>0$　　C. $a^2>b^2$　　D. $\frac{a}{c^2+1}>\frac{b}{c^2+1}$

3. 已知$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c,若$A=\frac{\pi}{3}$,$a=2\sqrt{3}$,$c=\frac{7}{2}$,则该三角形解的情况是

A. 无数解　　B. 2解　　C. 1解　　D. 无解

4. 已知实数x,y满足条件$\begin{cases}x\leqslant 2,\\x+y\geqslant 2,\\2x-y\geqslant 2,\end{cases}$则$\frac{y}{x}$的取值范围是

A. $[0,1]$　　B. $\left[\frac{1}{2},1\right]$　　C. $\left[0,\frac{4}{3}\right]$　　D. $\left[\frac{1}{3},1\right]$

5. 已知数列$\{a_n\}$满足$\frac{a_n+2}{a_{n+1}+2}=\frac{1}{3}$,且$a_1=1$,则$a_4=$

A. $-\frac{1}{3}$　　B. 79　　C. 12　　D. 11

6. 若实数x,y满足约束条件$\begin{cases}1\leqslant x+y\leqslant 3,\\-1\leqslant x-y\leqslant 1,\end{cases}$则$z=3x+y$的取值范围是

A. $[0,6]$　　B. $[1,6]$　　C. $[1,7]$　　D. $[0,5]$

7. 已知正项等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,$S_9=45$,则$a_2\cdot a_8$的最大值是

A. 40　　B. 50　　C. 80　　D. 25

8. 已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,$a_3=3$,$S_4=10$,则数列$\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$的前100项的和为

A. $\frac{200}{101}$　　B. $\frac{100}{101}$　　C. $\frac{1}{101}$　　D. $\frac{2}{101}$

9. 已知$f(x)$是一元二次函数，不等式$f(x)>0$的解集是$\{x|x<1$或$x>e\}$，则$f(e^x)<0$的解集是

A. $\{x|0<x<e\}$　　B. $\{x|1<x<2\}$　　C. $\{x|0<x<1\}$　　D. $\{x|2<x<e\}$

10. 若正实数x,y满足$x+3y+3xy-3=0$，则$x+3y$的最小值为

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 5

11. 已知$\triangle ABC$的三个内角A,B,C的大小依次成等差数列，角A,B,C的对边分别是a,b,c，并且函数$f(x)=ax^2+2x+c$的值域是$[0,+\infty)$，则$\triangle ABC$的面积是

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\sqrt{3}$

12. 2017年9月16日05时，第19号台风“杜苏芮”的中心位于甲地，它以每小时30千米的速度向西偏北θ的方向移动，距台风中心t千米以内的地区都将受到影响. 若16日08时到17日08时，距甲地正西方向900千米的乙地恰好受台风影响，则t和θ的值分别为(附：$\sqrt{73.71}\approx 8.585$)

A. 858.5，60°　　B. 858.5，30°　　C. 717，60°　　D. 717，30°

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 已知$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，若$A=\frac{3\pi}{4}$，$a=2$，$c=\sqrt{2}$，则$\sin C=$__________.

14. 设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_n+a_n=2$，则$a_{2018}=$__________.

15. 已知在$\triangle ABC$中，a,b,c分别为内角A,B,C所对的边，满足$a^2+b^2-ab=c^2$，$ab=4\sqrt{3}$，则$\triangle ABC$的面积是__________.

16. 数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，对任意$p,q\in \mathbf{N}^*$，都有$a_{p+q}=a_p+a_q$. 数列$\{b_n\}$满足$a_n=2\log_2 b_n$，则$\{b_n\}$的通项公式是$b_n=$__________.

三、解答题：共70分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. (10分)

在$\triangle ABC$中，内角A,B,C所对的边分别为a,b,c，已知$A=45°$，$b=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

(Ⅰ)求B的大小；

(Ⅱ)若$a=\sqrt{2}$，求$\triangle ABC$的面积.

18. (12分)

关于x的不等式$ax^2+(a-2)x-2\geq 0(a\in \mathbf{R})$的解集为$(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$.

(Ⅰ)求a的值；

(Ⅱ)若关于x的不等式$x^2-(3c+a)x+2c(c+a)<0$解集是集合A，不等式$(2-x)(x+1)>0$的解集是集合B. 若$A\subseteq B$，求实数c的取值范围.

19. (12 分)

在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别是a,b,c，且$\frac{b}{a+c}+\frac{\sin C}{\sin A+\sin B}=1$.

(Ⅰ)求A；

(Ⅱ)若$a=\sqrt{3}$，求b^2+c^2的取值范围.

20. (12 分)

已知单调递增的等比数列$\{a_n\}$满足$a_2+a_3+a_4=28$，且a_3+2是a_2,a_4的等差中项.

(Ⅰ)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(Ⅱ)数列$\{b_n\}$满足$b_1a_1+b_2a_2+\cdots+b_na_n=(2n-1)2^{n+1}+2$，求数列$\{a_n+b_n\}$的前$n$项和$S_n$.

21.（12分）

某大理石加工厂初期花费98万元购买磨大理石刀具，第一年需要各种费用12万元，从第二年起，每年所需费用比上一年增加4万元，该大理石加工厂每年总收入是50万元.

（Ⅰ）到第几年末总利润最大，最大值是多少？

（Ⅱ）到第几年末年平均利润最大，最大值是多少？

22.（12分）

已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_1+\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{3}a_3+\cdots+\frac{1}{n}a_n=a_{n+1}-1\,(n\in\mathbf{N}^*)$. 数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$S_n$，$S_n=2b_n-3$.

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）求数列$\{b_n\cdot a_n\}$的前n项和T_n.

数学（理科）·答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

1. C	2. D	3. B	4. A	5. B	6. C
7. D	8. A	9. C	10. B	11. A	12. A

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $\frac{1}{2}$　　14. $\frac{1}{2^{2017}}$

15. 3　　16. 2^n

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17.（Ⅰ）根据已知 $A=45°$，$b=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，利用正弦定理可得

$\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$. ……（3 分）

因为 $b=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，所以 $B<A$，所以 $B=30°$. ……（5 分）

（Ⅱ）根据（Ⅰ）可知，$A=45°$，$B=30°$，所以 $C=105°$.

根据 $a=\sqrt{2}$，可得 $b=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}=1$. ……（7 分）

$\sin C=\sin 105°=\sin 75°=\sin(45°+30°)=\sin 45°\cos 30°+\cos 45°\sin 30°=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，……（9 分）

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times 1\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{3}+1}{4}$. ……（10 分）

18.（Ⅰ）$\because$ 关于 x 的不等式 $ax^2+(a-2)x-2\geqslant 0$（$a\in\mathbf{R}$）的解集为 $(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$，$\therefore a>0$. ……（2 分）

又不等式对应方程的两个实数根为 -1 和 2，

$\therefore \frac{2}{a}=2$，解得 $a=1$. ……（4 分）

（Ⅱ）$\because a=1$，原不等式可转化为 $x^2-(3c+1)x+2c(c+1)<0$，

即 $(x-2c)(x-c-1)<0$，

$\therefore$ 对应方程的根为 $x_1=2c$，$x_2=c+1$ ……（6 分）

（1）当 $c>1$ 时，$2c>c+1$，$\therefore$ 不等式的解集是 $A=(c+1,2c)$，$B=(-1,2)$.

$\because A\subseteq B$，$\therefore \begin{cases}2c\leqslant 2,\\ c+1\geqslant -1,\\ c>1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c\leqslant 1,\\ c\geqslant -2,\\ c>1,\end{cases}\Rightarrow c\in\varnothing$. ……（8 分）

（2）当 $c<1$ 时，$2c<c+1$，$\therefore A=(2c,c+1)$，$B=(-1,2)$.

$\because A\subseteq B$，$\therefore \begin{cases}2c\geqslant -1,\\ c+1\leqslant 2,\\ c<1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c\geqslant -\frac{1}{2},\\ c\leqslant 1,\\ c<1,\end{cases}\Rightarrow -\frac{1}{2}\leqslant c<1$. ……（10 分）

(3) 当 $c=1$ 时，$A=\varnothing$，满足 $A\subseteq B$.

综合上述，$c\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$. ……………………………………………… (12分)

19. (Ⅰ) 利用正弦定理把角化为边，由 $\frac{b}{a+c}+\frac{\sin C}{\sin A+\sin B}=1$，得

$\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}=1$，……………………………………………… (2分)

所以 $(a+b)b+c(a+c)=(a+c)(a+b)$，

化简得 $b^2+c^2-a^2=bc$，……………………………………………… (4分)

所以 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$，所以 $A=60^\circ$. ……………………………………………… (6分)

(Ⅱ) 由 (Ⅰ) 得 $b^2+c^2=bc+a^2$，即 $b^2+c^2=bc+3$，……………………………………………… (8分)

所以 $b^2+c^2\leqslant\frac{b^2+c^2}{2}+3$，所以 $b^2+c^2\leqslant 6$. ……………………………………………… (10分)

又因为 A 是锐角，所以 $b^2+c^2>a^2=3$，所以 b^2+c^2 的取值范围是 $(3,6]$. ……………………… (12分)

20. 本题考查数列的通项，考查运算求解能力和转化与化归思想.

(Ⅰ) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，公比为 q.

依题意，把 $a_2+a_3+a_4=28$，代入 $2(a_3+2)=a_2+a_4$，

解得 $a_3=8$，……………………………………………… (3分)

$\therefore a_2+a_4=20$，$\therefore\begin{cases}a_1q+a_1q^3=20,\\ a_3=a_1q^2=8,\end{cases}$

解之得 $\begin{cases}q=2,\\ a_1=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}q=\frac{1}{2},\\ a_1=32.\end{cases}$ ……………………………………………… (5分)

又数列 $\{a_n\}$ 单调递增，$\therefore q=2$，$a_1=2$，$\therefore a_n=2^n$. ……………………………………………… (6分)

(Ⅱ) $\because b_1a_1+b_2a_2+\cdots+b_na_n=(2n-1)2^{n+1}+2$，

当 $n\geqslant 2$ 时，$b_1a_1+b_2a_2+\cdots+b_{n-1}a_{n-1}=(2n-3)2^n+2$，

两式相减得 $b_na_n=(2n-1)2^{n+1}-(2n-3)2^n$，即 $b_n2^n=(2n-1)2^{n+1}-(2n-3)2^n$，

$\therefore b_n=2\times(2n-1)-(2n-3)=2n+1\ (n\geqslant 2)$. ……………………………………………… (8分)

当 $n=1$ 时，$b_1a_1=2b_1=2^2+2=6$，$\therefore b_1=3$，满足 $b_n=2n+1$，

则数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=2n+1$. ……………………………………………… (10分)

$\therefore a_n+b_n=2^n+2n+1$，

$\therefore S_n=\frac{2(1-2^n)}{1-2}+\frac{n(2+2n)}{2}+n=2^{n+1}+n^2+2n-2$. ……………………………………………… (12分)

21. (Ⅰ) 设 n 年后的总利润为 y 万元，则

$y=50n-98-\left[12\times n+\frac{n(n-1)}{2}\times 4\right]=-2(n-10)^2+102$，……………………………………………… (5分)

所以到第 10 年末总利润最大，最大值是 102 万元. ……………………………………………… (6分)

(Ⅱ) 年平均利润为 $\frac{y}{n}=-2\left(n+\frac{49}{n}\right)+40\leqslant-28+40=12$，……………………………………………… (10分)

当且仅当 $n=\frac{49}{n}$，即 $n=7$ 时，上式取等号. ………………………………（11分）

所以到第7年末年平均利润最大，最大值是12万元. ………………………………（12分）

22.（Ⅰ）$\because a_1=1, a_1+\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{3}a_3+\cdots+\frac{1}{n}a_n=a_{n+1}-1\ (n\in\mathbf{N}^*)$，

$\therefore$ 当 $n\geq2$ 时，$a_1+\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{3}a_3+\cdots+\frac{1}{n-1}a_{n-1}=a_n-1$，

两式相减得 $\frac{1}{n}a_n=a_{n+1}-a_n$，即 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{n}$. ………………………………（2分）

又 $\because \frac{a_2}{a_1}=\frac{1+a_1}{a_1}=\frac{2}{1}$ 满足上式，$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{n}$. ………………………………（4分）

$\therefore$ 当 $n\geq2$ 时，$a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1=\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdot\cdots\cdot2\cdot1=n$. ………………………………（5分）

又 $\because a_1=1$ 满足上式，$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n$. ………………………………（6分）

（Ⅱ）由 $S_n=2b_n-3$，①得 $b_1=3$，$S_{n-1}=2b_{n-1}-3\ (n\geq2)$，②

① − ②，得 $b_n=2b_n-2b_{n-1}$，即 $b_n=2b_{n-1}\ (n\geq2, n\in\mathbf{N}^*)$，

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 是以3为首项，2为公比的等比数列，

$\therefore b_n=3\cdot2^{n-1}\ (n\in\mathbf{N}^*)$， ………………………………（9分）

$\therefore a_nb_n=3n\cdot2^{n-1}$，

$\therefore T_n=3(1\cdot2^0+2\cdot2^1+3\cdot2^2+\cdots+n\cdot2^{n-1})$，

$2T_n=3(1\cdot2^1+2\cdot2^2+3\cdot2^3+\cdots+n\cdot2^n)$，

作差得 $-T_n=3(1\cdot2^0+1\cdot2^1+1\cdot2^2+\cdots+1\cdot2^{n-1}-n\cdot2^n)$，

$\therefore T_n=3(n-1)2^n+3$. ………………………………（12分）