

2017-2018 学年高三（上）第三次月考数学试卷（文科）

一.选择题:

1. 已知集合 $M = \{x \mid (x-1)^2 < 9\}$, $N = \{-2, 0, 1, 2, 4\}$, 则 $M \cap N =$ ()

A. $\{0, 1, 2\}$ B. $\{-1, 0, 1, 2\}$ C. $\{-1, 0, 2, 3\}$ D. $\{0, 1, 2, 3\}$

2. 已知点 $A(0, 1)$, $B(1, 2)$, $C(-2, -1)$, $D(3, 4)$, 则 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{CD}$ 方向上的投影为 ()

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$ D. $-\frac{3\sqrt{15}}{2}$

3. 下列各函数中, 最小值为 2 的是 ()

A. $y = x + \frac{1}{x}$ B. $y = \sin x + \frac{1}{\sin x}$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

C. $y = \frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}}$ D. $y = x + \frac{4}{x-1} - 3$, ($x > 1$)

4. 把边长为 2 的正方形 $ABCD$ 沿对角线 BD 折起, 连接 AC , 得到三棱锥 $C-ABD$, 其正视图、俯视图均为全等的等腰直角三角形 (如图所示), 则其侧视图的面积为 ()



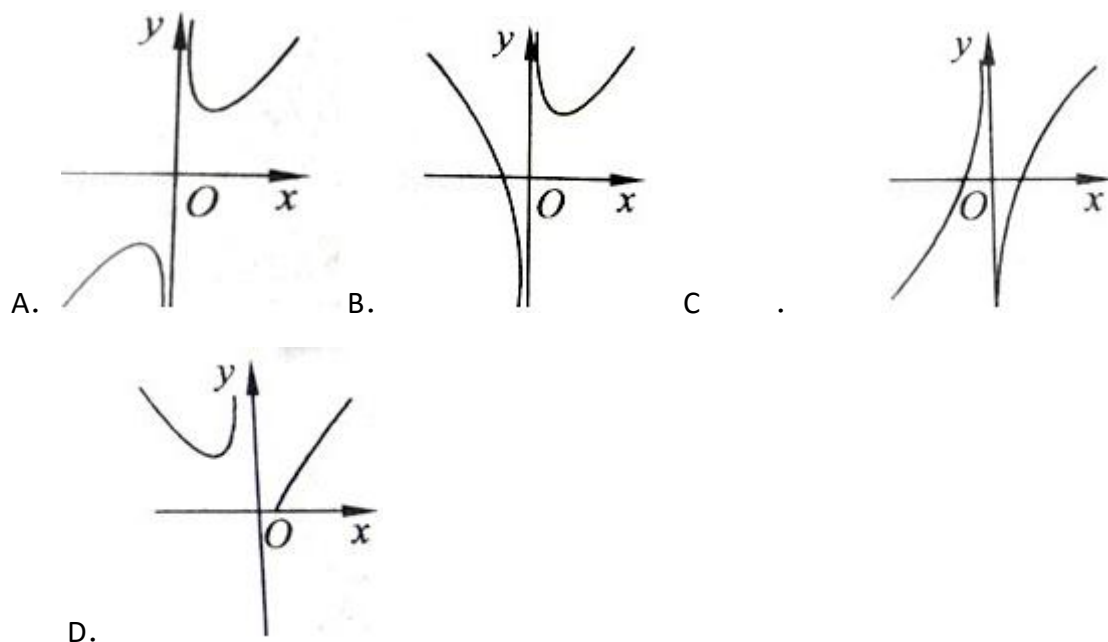
A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. 1 D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

5. 将函数 $y = \sin(2x + \phi)$ 的图象沿 x 轴向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后, 得到一个关于 y

轴对称的图象, 则 ϕ 的一个可能取值为 ()

A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $-\frac{\pi}{3}$ D. $-\frac{\pi}{6}$

6. 函数 $y = |x| + \frac{1}{x}$ 的图象大致为 ()



7. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边, 若 $B=2A, a=1, b=\sqrt{3}$, 则 $c=$ ()

- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. $2\sqrt{3}$

8. 在各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_5=3$, 则 $\log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \dots + \log_3 a_9$ 等于 ()

- A. 9 B. 12 C. 8 D. $2+\log_3 5$

9. 已知点 P 是椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 上的一点, F_1, F_2 是焦点, 若 $\angle F_1 P F_2$ 取最大值时, 则 $\triangle P F_1 F_2$ 的面积是 ()

- A. $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ B. 12 C. $16(2+\sqrt{3})$ D. $16(2-\sqrt{3})$

10. 设函数 $f(x)$ 满足 $2f(n+1) = 2f(n) + n$ (n 为正整数), $f(1) = 2$, 则 $f(40) =$ ()

- A. 41 B. 40 C. 391 D. 392

11. 已知双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率为 3, 若抛物线 $C_2: x^2 = 2py$

($p > 0$) 的焦点到双曲线 C_1 的渐近线的距离为 2, 则抛物线 C_2 的方程为 ()

- A. $x^2 = \frac{8\sqrt{3}}{3}y$ B. $x^2 = 4y$ C. $x^2 = 12y$ D. $x^2 = 24y$

12. 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 若 $f(x_1) = x_1 < x_2$, 则关

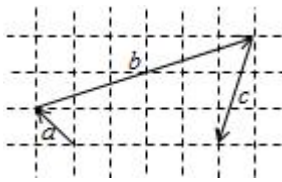
于 x 的方程 $3(f(x))^2 + 2af(x) + b = 0$ 的不同实根个数为 ()

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

二.填空题:

13. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = x^2 - 2x$, 则不等式 $f(x) > x$ 的解集用区间表示为_____.

14. 向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 在正方形网格中的位置如图所示, 若 $\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$), 则 $\frac{\lambda}{\mu} =$ _____.



15. 已知 $\triangle PAD$ 所在平面与矩形 $ABCD$ 所在平面互相垂直, $PA = PD = AB = 4$, $\angle APD = 90^\circ$, 若点 P, A, B, C, D 都在同一球面上, 则此球的表面积为_____.

16. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点分别为 $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, 若椭圆上存在一点 P 使 $\frac{a}{\sin \angle PF_1F_2} = \frac{c}{\sin \angle PF_2F_1}$, 则该椭圆的离心率的取值范围为_____.

三.解答题:

17. (12分) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_5 = 4S_2$, $a_{2n} = 2a_n - 1$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式

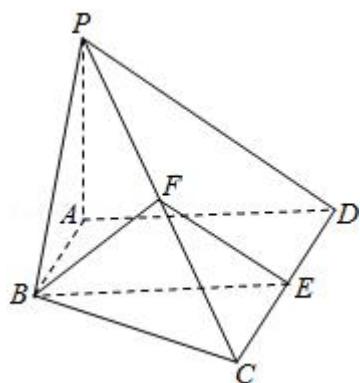
(2) 设 $b_n = \frac{1}{2na_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (12分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AB \perp AD$, $CD = 2AB$, 平面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$, $PA \perp AD$. E 和 F 分别是 CD 和 PC 的中点, 求证:

(I) $PA \perp$ 底面 $ABCD$;

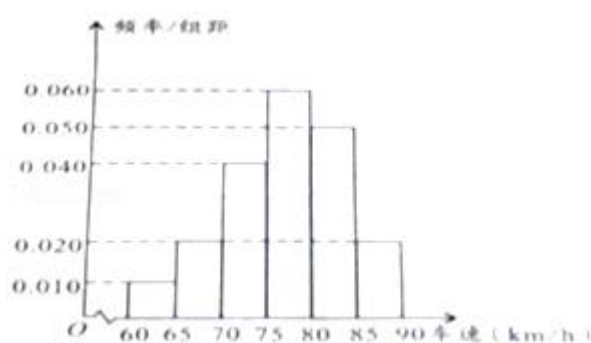
(II) $BE \parallel$ 平面 PAD ;

(III) 平面 $BEF \perp$ 平面 PCD .



19. (12 分) “双节”期间，高速公路车辆较多，某调查公司在一服务区从七座以下的小型汽车中按进服务区的先后每间隔 50 辆就抽取一辆的样本方法抽取 40 名驾驶员进行询问调查，将他们在某段高速公路的车速 (km/h) 分成六段：[60, 65)，[65, 70)，[70, 75)，[75, 80)，[80, 85)，[85, 90] 后得到如图所示的频率分布直方图.

- (1) 求这 40 辆小型汽车车速的众数和中位数的估计值；
- (2) 若从车速在 [60, 70) 内的车辆中任抽取 2 辆，求车速在 [65, 70) 内的车辆恰有一辆的概率.



20. (12 分) 已知函数 $f(x) = -\frac{1}{3}ax^3 - x^2 + x$ ($x > 0$, $a < 0$)

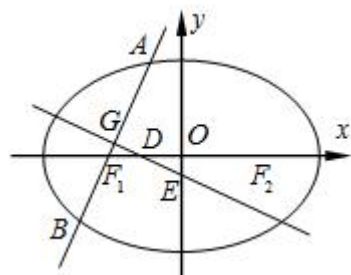
- (1) 若函数 $f(x)$ 在定义域内单调递增，求实数 a 的取值范围
- (2) 若 $a = -\frac{1}{4}$ ，且关于 x 的方程 $f'(x) = -\ln x - \frac{1}{2}x + 1 + b$ 在 $[1, 3]$ 上恰有两个不同的实根，求实数 b 的取值范围.

21. (12 分) 如图，已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，其左右焦点为 $F_1(-1, 0)$ 及 F_2

$(1, 0)$ ，过点 F_1 的直线交椭圆 C 于 A, B 两点，线段 AB 的中点为 G ， AB 的中垂线与 x 轴和 y 轴分别交于 D, E 两点，且 $|AF_1|$ 、 $|F_1F_2|$ 、 $|AF_2|$ 构成等差数列.

- (1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 记 $\triangle GF_1D$ 的面积为 S_1 , $\triangle OED$ (O 为原点)的面积为 S_2 . 试问: 是否存在直线 AB , 使得 $S_1=S_2$? 说明理由.



选做题:

22. (10分) 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=2-\sqrt{2}t \\ y=-1+\sqrt{2}t \end{cases}$ (t 为参数),

以原点为极点, 以 x 轴正半轴为极轴, 建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为

$$\rho = \frac{2}{\sqrt{1+3\sin^2 \theta}}$$

(1) 求曲线 C_1 的普通方程与曲线 C_2 的直角坐标方程;

(2) 设点 $M(2, -1)$, 曲线 C_1 与曲线 C_2 交于 A, B , 求 $|MA| \cdot |MB|$ 的值.

23. 已知函数 $f(x) = |x - a|$

(1) 若 $f(x) \leq m$ 的解集为 $[-1, 5]$, 求实数 a, m 的值

(2) 当 $a=2$ 且 $0 \leq t < 2$ 时, 解关于 x 的不等式 $f(x) + t \geq f(x+2)$

2017-2018 学年高三（上）第三次月考数学试卷（文科）

参考答案与试题解析

一.选择题:

1. 已知集合 $M = \{x \mid (x-1)^2 < 9\}$, $N = \{-2, 0, 1, 2, 4\}$, 则 $M \cap N =$ ()

A. $\{0, 1, 2\}$ B. $\{-1, 0, 1, 2\}$ C. $\{-1, 0, 2, 3\}$ D. $\{0, 1, 2, 3\}$

【分析】先分别求出集合 M , N , 由此能求出 $M \cap N$.

【解答】解: $\because$ 集合 $M = \{x \mid (x-1)^2 < 9\} = \{x \mid -2 < x < 4\}$,

$N = \{-2, 0, 1, 2, 4\}$,

$\therefore M \cap N = \{0, 1, 2\}$.

故选: A.

【点评】本题考查交集的求法, 是基础题, 解题时要认真审题, 注意交集定义的合理运用.

2. 已知点 $A(0, 1)$, $B(1, 2)$, $C(-2, -1)$, $D(3, 4)$, 则 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{CD}$ 方向上的投影为 ()

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$ D. $-\frac{3\sqrt{15}}{2}$

【分析】根据题意, 求出向量 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ 的坐标, 进而计算可得 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ 与 $|\overrightarrow{CD}|$, 结合数量积的计算公式计算可得答案.

【解答】解: 根据题意, 点 $A(0, 1)$, $B(1, 2)$, $C(-2, -1)$, $D(3, 4)$,

则 $\overrightarrow{AB} = (1, 1)$, $\overrightarrow{CD} = (5, 5)$,

则有 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 1 \times 5 + 1 \times 5 = 10$, $|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{25+25} = 5\sqrt{2}$,

则 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{CD}$ 方向上的投影 $\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|} = \frac{10}{5\sqrt{2}} = \sqrt{2}$;

故选: B.

【点评】本题考查向量数量积的计算, 关键掌握由向量数量积求向量夹角的方法.

3. 下列各函数中, 最小值为 2 的是 ()

A. $y=x+\frac{1}{x}$ B. $y=\sin x+\frac{1}{\sin x}$, $x\in(0, \frac{\pi}{2})$

C. $y=\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}}$ D. $y=x+\frac{4}{x-1}-3$, ($x>1$)

【分析】A. $x<0$ 时无最小值;

B. 由 $x\in(0, \frac{\pi}{2})$, 可得 $\sin x\in(0, 1)$, 利用基本不等式的性质可得 $y=\sin x+\frac{1}{\sin x}$

>2 , 因此最小值不是 2;

C. 利用基本不等式的性质可得 $y>2$, 因此最小值不是 2;

D. 由 $x>1$, 可得 $x-1>0$. 利用基本不等式的性质可得 $y=x-1+\frac{4}{x-1}-2$

$\geq 2\sqrt{(x-1)\cdot\frac{4}{x-1}}-2=2$.

【解答】解: A. $x<0$ 时无最小值;

B. $\because x\in(0, \frac{\pi}{2})$, $\therefore \sin x\in(0, 1)$, $\therefore y=\sin x+\frac{1}{\sin x}>2\sqrt{\sin x\cdot\frac{1}{\sin x}}=2$, 因此

最小值不是 2;

C. $y=\sqrt{x^2+2}+\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}>2\sqrt{\sqrt{x^2+2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}}=2$, 因此最小值不是 2;

D. $\because x>1$, $\therefore x-1>0$.

$\therefore y=x-1+\frac{4}{x-1}-2\geq 2\sqrt{(x-1)\cdot\frac{4}{x-1}}-2=2$, 当且仅当 $x=3$ 时取等号, 因此最小值是 2.

故选: D.

【点评】本题考查了基本不等式的性质, 使用时注意“一正二定三相等”的法则, 属于基础题.

4. 把边长为 2 的正方形 ABCD 沿对角线 BD 折起, 连接 AC, 得到三棱锥 C - ABD, 其正视图、俯视图均为全等的等腰直角三角形 (如图所示), 则其侧视图的面积为 ()



- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. 1 D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【分析】结合直观图，根据正视图、俯视图均为全等的等腰直角三角形，可得平面 $BCD \perp$ 平面 ABD ，分别求得 $\triangle BDC$ 和 $\triangle ABD$ 的高，即为侧视图直角三角形的两直角边长，代入面积公式计算．

【解答】解：如图： $\because$ 正视图、俯视图均为全等的等腰直角三角形，

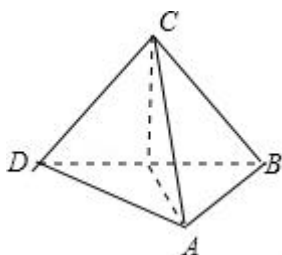
$\therefore$ 平面 $BCD \perp$ 平面 ABD ，

又 O 为 BD 的中点， $\therefore CO \perp$ 平面 ABD ， $OA \perp$ 平面 BCD ，

$\therefore$ 侧视图为直角三角形，且三角形的两直角边长为 $\sqrt{2}$ ．

$\therefore$ 侧视图的面积 $S = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 1$ ．

故选：C．



【点评】本题考查了由正视图、俯视图求几何体的侧视图的面积，判断几何体的特征及相关几何量的数据是关键．

5. 将函数 $y = \sin(2x + \phi)$ 的图象沿 x 轴向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后，得到一个关于 y 轴对称的图象，则 ϕ 的一个可能取值为 ()

- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $-\frac{\pi}{3}$ D. $-\frac{\pi}{6}$

【分析】利用函数图象的平移得到平移后的图象的解析式，再根据图象关于 y 轴对称可知平移后的函数为偶函数，

即函数 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{3} + \phi)$ 为偶函数，由此可得 $\frac{\pi}{3} + \phi = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ．求出 ϕ 的表达式后由 k 的取值得到 ϕ 的一个可能取值．

【解答】解：把函数 $y=\sin(2x+\phi)$ 的图象沿 x 轴向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后，得到图

象的函数解析式为：

$$y=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\phi\right]=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}+\phi\right).$$

$\therefore$ 得到的图象关于 y 轴对称，

$\therefore$ 函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}+\phi\right)$ 为偶函数.

$$\text{则 } \frac{\pi}{3}+\phi=k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}.$$

$$\text{即 } \phi=k\pi+\frac{\pi}{6}, k\in\mathbb{Z}.$$

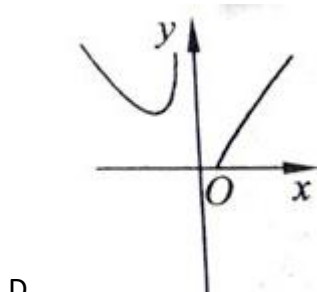
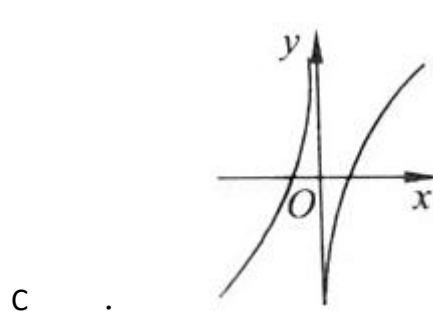
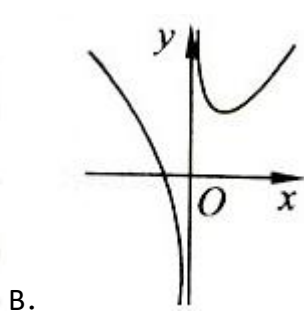
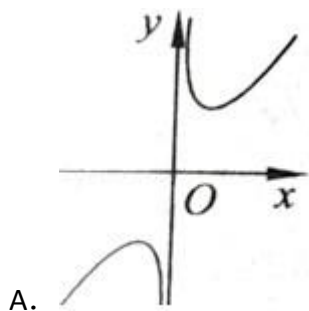
$$\text{取 } k=0 \text{ 时, 得 } \phi=\frac{\pi}{6}.$$

$$\text{则 } \phi \text{ 的一个可能取值为 } \frac{\pi}{6}.$$

故选：B.

【点评】本题考查 $y=A\sin(\omega x+\phi)$ 的图象变换，考查了三角函数中诱导公式的应用，关键是明确函数的奇偶性与图象之间的关系，是中档题.

6. 函数 $y=|x|+\frac{1}{x}$ 的图象大致为 ()



【分析】判断 x 小于 0 的单调性，结合 x 大于 0 时，函数的特征判断图象即可.

【解答】解：当 $x>0$ 时， $y=x+\frac{1}{x}$ 是对号函数，排除 C，D，

当 $x < 0$ 时, $y = -x + \frac{1}{x}$, 函数是减函数, 排除 A,

故选: B.

【点评】本题考查函数的图象的判断, 利用常见函数的图象以及函数的单调性是判断函数的图象的常用方法.

7. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边, 若 $B=2A$, $a=1$, $b=\sqrt{3}$, 则 $c=$ ()

A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. $2\sqrt{3}$

【分析】直接利用三角函数关系式的恒等变换和正弦定理求出 A 和 B 的值, 进一步利用勾股定理求出结果.

【解答】解: $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边, 若 $B=2A$, $a=1$, $b=\sqrt{3}$,

利用正弦定理: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$,

整理得: $\frac{1}{\sin A} = \frac{\sqrt{3}}{2\sin A \cos A}$,

所以: $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

由于: $0 < A < \pi$,

解得: $A = \frac{\pi}{6}$,

故: $B = 2A = \frac{\pi}{3}$.

利用三角形内角和定理得: $C = \pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$,

所以: $\triangle ABC$ 为直角三角形,

故: $c^2 = a^2 + b^2 = 1 + 3 = 4$,

解得: $c = 2$.

故选: C

【点评】本题考查的知识要点: 正弦定理的应用, 三角函数关系式的恒等变换, 勾股定理的应用及相关的运算问题.

8. 在各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_5 = 3$, 则 $\log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \dots + \log_3 a_9$ 等于

()

A. 9 B. 12 C. 8 D. $2+\log_3 5$

【分析】根据等比数列的性质和对数的运算法则进行求解即可.

【解答】解: $\because$ 在各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中, 且 $a_5=3$,

$$\therefore \log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \dots + \log_3 a_9 = \log_3 (a_1 \times a_2 \times \dots \times a_9) = \log_3 a_5^9 = \log_3 3^9 = 9.$$

故选: A.

【点评】本题考查运用等比数列的性质化简求值, 掌握对数的运算法则, 是一道基础题.

9. 已知点 P 是椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 上的一点, F_1, F_2 是焦点, 若 $\angle F_1 P F_2$ 取最大值时,

则 $\triangle P F_1 F_2$ 的面积是 ()

A. $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ B. 12 C. $16(2+\sqrt{3})$ D. $16(2-\sqrt{3})$

【分析】由已知椭圆方程求出 a, b 的值, 由 $|PF_1| + |PF_2| = 10$, 结合基本不等式可得当且仅当 $|PF_1| = |PF_2| = 5$ 时, $|PF_1| \cdot |PF_2|$ 有最大值, 结合余弦定理可得当 $\angle F_1 P F_2$ 取最大值时, $\sin \angle F_1 P F_2 = \frac{24}{25}$, 代入三角形面积公式求解.

【解答】解: 由椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, 得 $a=5, b=4$,

$$\therefore |PF_1| + |PF_2| = 10, \text{ 则 } |PF_1| \cdot |PF_2| \leq \left(\frac{|PF_1| + |PF_2|}{2} \right)^2 = 25,$$

当且仅当 $|PF_1| = |PF_2| = 5$ 时上式取“=”.

$$\therefore \cos \angle F_1 P F_2 = \frac{|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - |F_1 F_2|^2}{2|PF_1| \cdot |PF_2|} = \frac{25 + 25 - 16}{2 \times 5 \times 5} = \frac{34}{50} = \frac{17}{25}.$$

$$\therefore \sin \angle F_1 P F_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{17}{25} \right)^2} = \frac{24}{25}.$$

$$\therefore S_{\triangle P F_1 F_2} = \frac{1}{2} |PF_1| \cdot |PF_2| \cdot \sin \angle F_1 P F_2 = \frac{1}{2} \times 5 \times 5 \times \frac{24}{25} = 12.$$

$$= \frac{4a^2 - 4c^2}{2|PF_1| \cdot |PF_2|} - 1 = \frac{4b^2}{2|PF_1| \cdot |PF_2|} - 1 = \frac{32}{|PF_1| \cdot |PF_2|} - 1 \geq \frac{32}{25} - 1 = \frac{7}{25}.$$

$$\therefore \text{当 } \angle F_1 P F_2 \text{ 取最大值时, } \sin \angle F_1 P F_2 = \frac{24}{25}.$$

$$\therefore \triangle PF_1F_2 \text{ 的面积是 } S = \frac{1}{2} |PF_1| \cdot |PF_2| \cdot \sin \angle F_1PF_2 = \frac{1}{2} \times 25 \times \frac{24}{25} = 12.$$

故选：B.

【点评】 本题考查椭圆的标准方程以及简单性质，考查利用基本不等式求最值，考查计算能力，属于中档题.

10. 设函数 $f(x)$ 满足 $2f(n+1) = 2f(n) + n$ (n 为正整数), $f(1) = 2$, 则 $f(40) = (\quad)$

A. 41 B. 40 C. 391 D. 392

【分析】 由函数 $f(x)$ 满足 $2f(n+1) = 2f(n) + n$, $f(1) = 2$, 求出函数的解析式, 可得答案.

【解答】 解: $\because$ 函数 $f(x)$ 满足 $2f(n+1) = 2f(n) + n$, $f(1) = 2$,

$$\therefore f(n+1) = f(n) + \frac{n}{2},$$

$$\text{即 } f(n+1) - f(n) = \frac{n}{2},$$

$$\text{则 } f(2) - f(1) = \frac{1}{2},$$

$$f(3) - f(2) = 1,$$

$$f(4) - f(3) = \frac{3}{2},$$

...

$$f(n) - f(n-1) = \frac{n-1}{2},$$

$$\text{累加得: } f(n) - f(1) = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + \dots + \frac{n-1}{2} = \frac{n(n-1)}{4},$$

$$\text{即 } f(40) - 2 = 390,$$

$$\text{故 } f(40) = 392,$$

故选：D.

【点评】 本题考查的知识点是抽象函数的应用，函数求值，难度中档.

11. 已知双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0$, $b > 0$) 的离心率为 3, 若抛物线 $C_2: x^2 = 2py$

($p > 0$) 的焦点到双曲线 C_1 的渐近线的距离为 2, 则抛物线 C_2 的方程为 ()

A. $x^2 = \frac{8\sqrt{3}}{3}y$ B. $x^2 = 4y$ C. $x^2 = 12y$ D. $x^2 = 24y$

【分析】求得双曲线的渐近线方程，化为一般式，求得抛物线的焦点坐标，运用点到直线的距离公式，结合离心率公式，计算求得 p ，即可求得抛物线 C_2 的方程.

【解答】解：由题意可得双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$

的渐近线为 $y = \pm \frac{b}{a}x$,

化为一般式可得 $bx \pm ay = 0$, 离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = 3$,

解得: $b = 2\sqrt{2}a$, $c = 3a$,

又抛物线 $C_2: x^2 = 2py$ ($p > 0$) 的焦点为 $(0, \frac{p}{2})$,

故焦点到 $bx \pm ay = 0$ 的距离 $d = \frac{\frac{ap}{2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{ap}{2c} = 2$,

$$\therefore p = \frac{4c}{a} = 12,$$

$\therefore$ 抛物线 C_2 的方程为: $x^2 = 24y$.

故选: D.

【点评】本题考查抛物线及双曲线的简单几何性质，考查点到直线的距离公式，考查计算能力，属于中档题.

12. 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 若 $f(x_1) = x_1 < x_2$, 则关于 x 的方程 $3(f(x))^2 + 2af(x) + b = 0$ 的不同实根个数为 ()

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

【分析】由函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 可得 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b = 0$ 有两个不相等的实数根, 必有 $\Delta = 4a^2 - 12b > 0$. 而方程 $3(f(x))^2 + 2af(x) + b = 0$ 的 $\Delta_1 = \Delta > 0$, 可知此方程有两解且 $f(x) = x_1$ 或 x_2 . 再分别讨论利用平移变换即可解出方程 $f(x) = x_1$ 或 $f(x) = x_2$ 解的个数.

【解答】解: $\because$ 函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 有两个极值点 x_1, x_2 ,
 $\therefore f'(x) = 3x^2 + 2ax + b = 0$ 有两个不相等的实数根,

$$\therefore \Delta = 4a^2 - 12b > 0. \text{ 解得 } x = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 - 12b}}{6} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 3b}}{3}.$$

$$\because x_1 < x_2,$$

$$\therefore x_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 3b}}{3}, \quad x_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 3b}}{3}.$$

而方程 $3(f(x))^2 + 2af(x) + b = 0$ 的 $\Delta_1 = \Delta > 0$,

$\therefore$ 此方程有两解且 $f(x) = x_1$ 或 x_2 .

不妨取 $0 < x_1 < x_2$, $f(x_1) > 0$.

①把 $y=f(x)$ 向下平移 x_1 个单位即可得到 $y=f(x) - x_1$ 的图象,

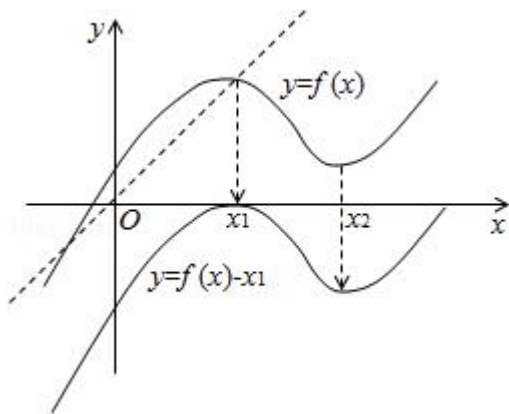
$\because f(x_1) = x_1$, 可知方程 $f(x) = x_1$ 有两解.

②把 $y=f(x)$ 向下平移 x_2 个单位即可得到 $y=f(x) - x_2$ 的图象, $\because f(x_1) = x_1$,

$\therefore f(x_1) - x_2 < 0$, 可知方程 $f(x) = x_2$ 只有一解.

综上①②可知: 方程 $f(x) = x_1$ 或 $f(x) = x_2$. 只有 3 个实数解. 即关于 x 的方程 $3(f(x))^2 + 2af(x) + b = 0$ 的只有 3 不同实根.

故选: A.



【点评】 本题综合考查了利用导数研究函数的单调性、极值及方程解的个数、平移变换等基础知识, 考查了数形结合的思想方法、推理能力、分类讨论的思想方法、计算能力、分析问题和解决问题的能力.

二.填空题:

13. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = x^2 - 2x$, 则不等式 $f(x) > x$ 的解集用区间表示为 $(-3, 0) \cup (3, +\infty)$.

【分析】先求得当 $x < 0$ 时, $f(x)$ 的解析式, 由不等式 $f(x) > x$, 可得 $\begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 2x > x \end{cases}$,

或 $\begin{cases} x < 0 \\ -x^2 - 2x > x \end{cases}$, 由此求得 x 的范围.

【解答】解: 设 $x < 0$, 则 $-x > 0$, 由题意可得 $f(-x) = -f(x) = (-x)^2 - 2$
 $(-x) = x^2 + 2x$,

$$\therefore f(x) = -x^2 - 2x,$$

故当 $x < 0$ 时, $f(x) = -x^2 - 2x$.

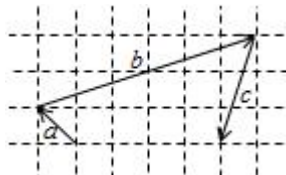
由不等式 $f(x) > x$, 可得 $\begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 2x > x \end{cases}$, 或 $\begin{cases} x < 0 \\ -x^2 - 2x > x \end{cases}$,

求得 $x > 3$, 或 $-3 < x < 0$,

故答案为: $(-3, 0) \cup (3, +\infty)$.

【点评】本题主要考查函数的奇偶性和单调性的综合应用, 属于基础题.

14. 向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 在正方形网格中的位置如图所示, 若 $\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$), 则 $\frac{\lambda}{\mu} = \underline{4}$.



【分析】以向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的公共点为坐标原点, 建立如图直角坐标系, 得到向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 的坐标, 结合题中向量等式建立关于 λ , μ 的方程组, 解之得 $\lambda = -2$ 且 $\mu = -\frac{1}{2}$, 即可得到 $\frac{\mu}{\lambda}$ 的值.

【解答】解: 以向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的公共点为坐标原点, 建立如图直角坐标系

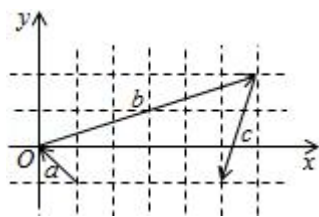
可得 $\vec{a} = (-1, 1)$, $\vec{b} = (6, 2)$, $\vec{c} = (-1, -3)$

$$\because \vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

$$\therefore \begin{cases} -1 = -\lambda + 6\mu \\ -3 = \lambda + 2\mu \end{cases}, \text{ 解之得 } \lambda = -2 \text{ 且 } \mu = -\frac{1}{2}$$

因此, $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{-2}{\frac{1}{2}} = 4$

故答案为: 4



【点评】本题给出向量 $\vec{c}$ 用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 线性表示, 求系数 λ 、 μ 的比值, 着重考查了平面向量的坐标运算法则和平面向量基本定理及其意义等知识, 属于基础题.

15. 已知 $\triangle PAD$ 所在平面与矩形 $ABCD$ 所在平面互相垂直, $PA=PD=AB=4$, $\angle APD=90^\circ$, 若点 P , A , B , C , D 都在同一球面上, 则此球的表面积为 48π .

【分析】由题意, 设球心为 O , 如图. 由于点 P 、 A 、 B 、 C 、 D 都在同一球面上, 球的直径就是矩形对角线的长, 求得球的半径, 从而得出表面积.

【解答】解: 设球心为 O , 如图.

由 $PA=PD=AB=4$, $\angle APD=90^\circ$, 可求得 $AD=4\sqrt{2}$.

在矩形 $ABCD$ 中, 可求得对角线 $BD=\sqrt{4^2+(4\sqrt{2})^2}=4\sqrt{3}$.

由于点 P 、 A 、 B 、 C 、 D 都在同一球面上,

取 AD 的中点 Q , 则 $PQ \perp AD$,

$\triangle PAD$ 所在平面与矩形 $ABCD$ 所在平面互相垂直,

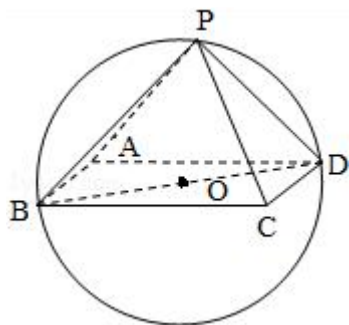
$PQ \perp$ 矩形 $ABCD$, $\triangle PQO$ 是直角三角形.

$PO=OD=OB$

$\therefore$ 球的半径 $R=\frac{1}{2}BD=2\sqrt{3}$.

则此球的表面积等于 $=4\pi R^2=48\pi$.

故答案为: 48π .



【点评】本题是中档题，考查球的体积和表面积，解题的根据是点 P、A、B、C、D 都在同一球面上，考查计算能力，空间想象能力.

16. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点分别为 $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, 若椭圆上存在一点 P 使 $\frac{a}{\sin \angle PF_1F_2} = \frac{c}{\sin \angle PF_2F_1}$, 则该椭圆的离心率的取值范围为 $(\sqrt{2}-1, 1)$.

【分析】由“ $\frac{a}{\sin \angle PF_1F_2} = \frac{c}{\sin \angle PF_2F_1}$ ”的结构特征，联想到在 $\triangle PF_1F_2$ 中运用由正弦定理得： $\frac{|PF_2|}{\sin \angle PF_1F_2} = \frac{|PF_1|}{\sin \angle PF_2F_1}$ 两者结合起来，可得到 $\frac{a}{|PF_2|} = \frac{c}{|PF_1|}$ ，再由焦点半径公式，代入可得到： $a(a+ex_0) = c(a-ex_0)$ 解出 x_0 ，由椭圆的范围，建立关于离心率的不等式求解. 要注意椭圆离心率的范围.

【解答】解：在 $\triangle PF_1F_2$ 中，

由正弦定理得： $\frac{|PF_2|}{\sin \angle PF_1F_2} = \frac{|PF_1|}{\sin \angle PF_2F_1}$

则由已知得： $\frac{a}{|PF_2|} = \frac{c}{|PF_1|}$,

即： $a|PF_1| = c|PF_2|$

设点 (x_0, y_0) 由焦点半径公式，

得： $|PF_1| = a+ex_0$, $|PF_2| = a-ex_0$

则 $a(a+ex_0) = c(a-ex_0)$

解得： $x_0 = \frac{a(c-a)}{e(c+a)} = \frac{a(e-1)}{e(e+1)}$

由椭圆的几何性质知: $x_0 > -a$ 则 $\frac{a(e-1)}{e(e+1)} > -a$,

整理得 $e^2 + 2e - 1 > 0$, 解得: $e < -\sqrt{2}-1$ 或 $e > \sqrt{2}-1$, 又 $e \in (0, 1)$,

故椭圆的离心率: $e \in (\sqrt{2}-1, 1)$,

故答案为: $(\sqrt{2}-1, 1)$.

【点评】 本题主要考查椭圆的定义, 性质及焦点三角形的应用, 特别是离心率应是椭圆考查的一个亮点, 多数是用 a, b, c 转化, 用椭圆的范围来求解离心率的范围.

三.解答题:

17. (12 分) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_5 = 4S_2$, $a_{2n} = 2a_n - 1$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式

(2) 设 $b_n = \frac{1}{2na_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

【分析】 (1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 , 公差为 d , 由 $S_5 = 4S_2$, $a_{2n} = 2a_n - 1$ 列关于首项和公差的方程组, 得 $a_1 = 2$, $d = 1$, 则 a_n 可求;

(2) 把 $\{a_n\}$ 的通项公式代入 $b_n = \frac{1}{2na_n}$, 然后利用裂项相消法求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

【解答】 解: (1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 , 公差为 d ,

$$\text{由 } S_5 = 4S_2, a_{2n} = 2a_n - 1, \text{ 得 } \begin{cases} 5a_1 + \frac{5 \times 4}{2}d = 4(2a_1 + d) \\ a_1 + d = 2a_1 - 1 \end{cases}, \text{ 解得 } a_1 = 2, d = 1.$$

$$\therefore a_n = 2 + (n-1) \times 1 = n+1;$$

$$(2) \because b_n = \frac{1}{2na_n} = \frac{1}{2n(n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right),$$

$$\therefore T_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{n}{2n+2}.$$

【点评】 本题考查数列递推式, 考查了等差数列的通项公式, 训练了裂项相消法求数列的前 n 项和, 是中档题.

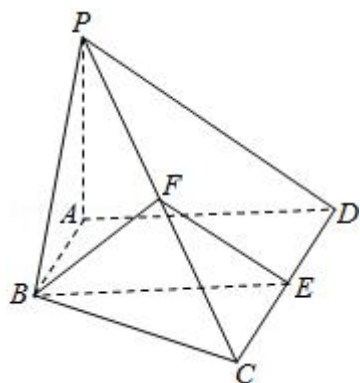
18. (12 分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AB \perp AD$, $CD = 2AB$, 平面

$PAD \perp$ 底面 $ABCD$, $PA \perp AD$. E 和 F 分别是 CD 和 PC 的中点, 求证:

(I) $PA \perp$ 底面 $ABCD$;

(II) $BE \parallel$ 平面 PAD ;

(III) 平面 $BEF \perp$ 平面 PCD .



【分析】(I) 根据条件, 利用平面和平面垂直的性质定理可得 $PA \perp$ 平面 $ABCD$.

(II) 根据已知条件判断 $ABED$ 为平行四边形, 故有 $BE \parallel AD$, 再利用直线和平面平行的判定定理证得 $BE \parallel$ 平面 PAD .

(III) 先证明 $ABED$ 为矩形, 可得 $BE \perp CD$ ①. 现证 $CD \perp$ 平面 PAD , 可得 $CD \perp PD$, 再由三角形中位线的性质可得 $EF \parallel PD$, 从而证得 $CD \perp EF$ ②. 结合①②利用直线和平面垂直的判定定理证得 $CD \perp$ 平面 BEF , 再由平面和平面垂直的判定定理证得平面 $BEF \perp$ 平面 PCD .

【解答】解: (I) $\because PA \perp AD$, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$, 由平面和平面垂直的性质定理可得 $PA \perp$ 平面 $ABCD$.

(II) $\because AB \parallel CD$, $AB \perp AD$, $CD = 2AB$, E 和 F 分别是 CD 和 PC 的中点, 故四边形 $ABED$ 为平行四边形, 故有 $BE \parallel AD$.

又 $AD \subset$ 平面 PAD , BE 不在平面 PAD 内, 故有 $BE \parallel$ 平面 PAD .

(III) 平行四边形 $ABED$ 中, 由 $AB \perp AD$ 可得, $ABED$ 为矩形, 故有 $BE \perp CD$ ①. 由 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 可得 $PA \perp AB$, 再由 $AB \perp AD$ 可得 $AB \perp$ 平面 PAD , $\therefore CD \perp$ 平面 PAD , 故有 $CD \perp PD$.

再由 E 、 F 分别为 CD 和 PC 的中点, 可得 $EF \parallel PD$,

$\therefore CD \perp EF$ ②.

而 EF 和 BE 是平面 BEF 内的两条相交直线，故有 $CD \perp$ 平面 BEF .

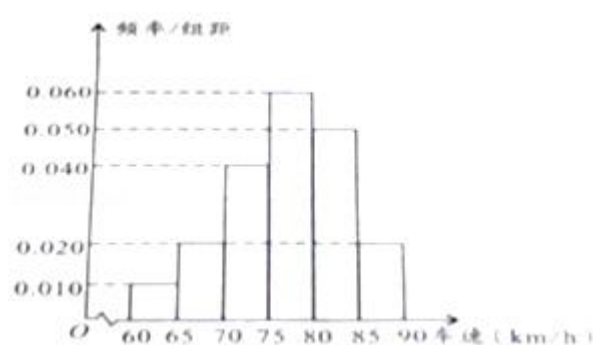
由于 $CD \subset$ 平面 PCD ， $\therefore$ 平面 $BEF \perp$ 平面 PCD .

【点评】本题主要考查直线和平面垂直的判定定理，直线和平面平行的判定定理，平面和平面垂直的判定定理、性质定理的应用，属于中档题.

19. (12 分) “双节”期间，高速公路车辆较多，某调查公司在一服务区从七座以下的小型汽车中按进服务区的先后每间隔 50 辆就抽取一辆的样本方法抽取 40 名驾驶员进行询问调查，将他们在某段高速公路的车速 (km/h) 分成六段：[60, 65)，[65, 70)，[70, 75)，[75, 80)，[80, 85)，[85, 90] 后得到如图所示的频率分布直方图.

(1) 求这 40 辆小型汽车车速的众数和中位数的估计值；

(2) 若从车速在 [60, 70) 内的车辆中任抽取 2 辆，求车速在 [65, 70) 内的车辆恰有一辆的概率.



【分析】(1) 由频率分布直方图知 [75, 80) 对应的小矩形最高，由此能求出这 40 辆小型汽车车速的众数；由频率分布直方图求出 [60, 75) 对应的频率为 0.35，[75, 80) 对应的频率为 0.3，由此能求出中位数的估计值.

(2) 车速在 [60, 70) 内频率为 0.15，从而车速在 [60, 70) 内的车辆有 6 辆，其中车速在 [60, 65) 内的车辆有 2 辆，车速在 [65, 70) 内的车辆有 4 辆，由此能求出从车速在 [60, 70) 内的车辆中任抽取 2 辆，车速在 [65, 70) 内的车辆恰有一辆的概率.

【解答】解：(1) 由频率分布直方图知 [75, 80) 对应的小矩形最高，

$\therefore$ 这 40 辆小型汽车车速的众数为： $\frac{75+80}{2}=77.5$ (km/h).

由频率分布直方图知 $[60, 75)$ 对应的频率为:

$$(0.010+0.020+0.040) \times 5=0.35,$$

$[75, 80)$ 对应的频率为: $0.060 \times 5=0.3$,

$$\therefore \text{中位数的估计值为: } 75 + \frac{(0.5-0.35)}{0.3} \times 5 = 77.5 \text{ (km/h)}.$$

(2) 车速在 $[60, 70)$ 内频率为 $(0.010+0.020) \times 5=0.15$,

$\therefore$ 车速在 $[60, 70)$ 内的车辆有 $0.15 \times 40=6$ 辆,

其中车速在 $[60, 65)$ 内的车辆有: $0.010 \times 5 \times 40=2$ 辆,

车速在 $[65, 70)$ 内的车辆有: $0.020 \times 5 \times 40=4$ 辆,

$\therefore$ 从车速在 $[60, 70)$ 内的车辆中任抽取 2 辆,

$$\text{基本事件总数 } n = C_6^2 = 15,$$

车速在 $[65, 70)$ 内的车辆恰有一辆包含的基本事件个数 $m = C_4^1 C_2^1 = 8$,

$$\therefore \text{车速在} [65, 70) \text{ 内的车辆恰有一辆的概率 } p = \frac{m}{n} = \frac{8}{15}.$$

【点评】 本题考查众数、中位数的求法, 考查概率的求法, 是基础题, 解题时要认真审题, 注意频率分布直方图的性质的合理运用.

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = -\frac{1}{3}ax^3 - x^2 + x$ ($x > 0$, $a < 0$)

(1) 若函数 $f(x)$ 在定义域内单调递增, 求实数 a 的取值范围

(2) 若 $a = -\frac{1}{4}$, 且关于 x 的方程 $f'(x) = -\ln x - \frac{1}{2}x + 1 + b$ 在 $[1, 3]$ 上恰有两个不同的实根, 求实数 b 的取值范围.

【分析】 (1) 可得 $f'(x) \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 即 $a \leq \frac{2x-1}{-x^2}$, ($x > 0$)

$$g(x) = \frac{2x-1}{-x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2 - 1 \geq -1, \text{ 可得实数 } a \text{ 的取值范围.}$$

(2) 原问题 $\Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2 - 2x + 1 = -\ln x - \frac{1}{2}x + 1 + b$ 在 $[1, 3]$ 上恰有两个不同的实根, $\Rightarrow$
 $b = \ln x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x$ 在 $[1, 3]$ 上恰有两个不同的实根, 令 $h(x) = \ln x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x$, $x \in [1, 3]$, 根据 $h(x)$ 的图象即可.

【解答】 解: (1) $f'(x) = -ax^2 - 2x + 1$ ($x > 0$, $a < 0$),

要使函数 $f(x)$ 在定义域内单调递增, 则 $f'(x) \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

$$\text{即 } a \leq \frac{2x-1}{-x^2}, (x>0)$$

$$g(x) = \frac{2x-1}{-x^2} = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = \left(-\frac{1}{x} - 1\right)^2 - 1 \geq -1$$

$$\therefore a \geq -1$$

则求实数 a 的取值范围为 $(-\infty, -1]$

(2) $a = -\frac{1}{4}$ 时, 关于 x 的方程 $f'(x) = -\ln x - \frac{1}{2}x + 1 + b$ 在 $[1, 3]$ 上恰有两个不同的实根,

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2 - 2x + 1 = -\ln x - \frac{1}{2}x + 1 + b \text{ 在 } [1, 3] \text{ 上恰有两个不同的实根,}$$

$$\Rightarrow b = \ln x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x \text{ 在 } [1, 3] \text{ 上恰有两个不同的实根,}$$

$$\text{令 } h(x) = \ln x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x, x \in [1, 3]$$

$$h'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = \frac{x^2 - 3x + 2}{2x} = \frac{(x-1)(x-2)}{2x}$$

$\therefore h(x)$ 在 $(1, 2)$ 递减, 在 $(2, 3)$ 递增

$$h(1) = -\frac{5}{4}, h(2) = \ln 2 - 2, h(3) = \ln 3 - \frac{9}{4},$$

$$h(1) < h(3)$$

$$\therefore b \text{ 的取值范围是 } (\ln 2 - 2, -\frac{5}{4}]$$

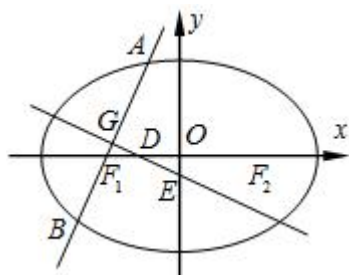
【点评】 题主要考查函数单调性与其导函数正负之间的关系, 函数的零点问题, 考查了转化思想, 属于中档题.

21. (12分) 如图, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 其左右焦点为 $F_1(-1, 0)$ 及 F_2

$(1, 0)$, 过点 F_1 的直线交椭圆 C 于 A, B 两点, 线段 AB 的中点为 G , AB 的中垂线与 x 轴和 y 轴分别交于 D, E 两点, 且 $|AF_1|, |F_1F_2|, |AF_2|$ 构成等差数列.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 记 $\triangle GF_1D$ 的面积为 S_1 , $\triangle OED$ (O 为原点) 的面积为 S_2 . 试问: 是否存在直线 AB , 使得 $S_1 = S_2$? 说明理由.



【分析】(1) 依题意, $|AF_1|$ 、 $|F_1F_2|$ 、 $|AF_2|$ 构成等差数列, 求出 a , 再利用 $c=1$, 求出 b , 即可求椭圆 C 的方程;

(2) 假设存在直线 AB , 使得 $S_1=S_2$, 确定 G , D 的坐标, 利用 $\triangle GFD \sim \triangle OED$, 即可得到结论.

【解答】解: (1) 因为 $|AF_1|$ 、 $|F_1F_2|$ 、 $|AF_2|$ 构成等差数列,

所以 $2a = |AF_1| + |AF_2| = 2|F_1F_2| = 4$, 所以 $a=2$ (2 分)

又因为 $c=1$, 所以 $b^2=3$, ...

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ (4 分)

(2) 假设存在直线 AB , 使得 $S_1=S_2$, 显然直线 AB 不能与 x , y 轴垂直.

设 AB 方程为 $y=k(x+1)$... (5 分)

将其代入 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 整理得 $(4k^2+3)x^2 + 8k^2x + 4k^2 - 12 = 0$... (6 分)

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 所以 $x_1 + x_2 = \frac{-8k^2}{4k^2+3}$.

故点 G 的横坐标为 $\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{-4k^2}{4k^2+3}$. 所以 $G(\frac{-4k^2}{4k^2+3}, \frac{3k}{4k^2+3})$ (8 分)

因为 $DG \perp AB$, 所以 $\frac{\frac{3k}{4k^2+3} - y_D}{\frac{-4k^2}{4k^2+3} - x_D} \times k = -1$, 解得 $x_D = \frac{-k^2}{4k^2+3}$,

即 $D(\frac{-k^2}{4k^2+3}, 0)$... (10 分)

$\because \text{Rt}\triangle GDF_1$ 和 $\text{Rt}\triangle ODE_1$ 相似, $\therefore$ 若 $S_1=S_2$, 则 $|GD|=|OD|$... (11 分)

$$\text{所以 } \sqrt{\left(\frac{-k^2}{4k^2+3} - \frac{-4k^2}{4k^2+3}\right)^2 + \left(\frac{3k}{4k^2+3}\right)^2} = \left|\frac{-k^2}{4k^2+3}\right|, \dots (12 \text{ 分})$$

整理得 $8k^2+9=0$ (13 分)

因为此方程无解, 所以不存在直线 AB, 使得 $S_1=S_2$ (14 分)

【点评】 本题考查直线与椭圆的位置关系, 考查韦达定理的运用, 考查学生分析问题解决问题的能力, 属于中档题.

选做题:

22. (10 分) 在直角坐标系 xoy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=2-\sqrt{2}t \\ y=-1+\sqrt{2}t \end{cases}$ (t 为参数),

以原点为极点, 以 x 轴正半轴为极轴, 建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为

$$\rho = \frac{2}{\sqrt{1+3\sin^2 \theta}}$$

(1) 求曲线 C_1 的普通方程与曲线 C_2 的直角坐标方程;

(2) 设点 M (2, -1), 曲线 C_1 与曲线 C_2 交于 A, B, 求 $|MA| \cdot |MB|$ 的值.

【分析】 (1) 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=2-\sqrt{2}t \\ y=-1+\sqrt{2}t \end{cases}$ (t 为参数), 两式相加消去参数

t 即可化为普通方程; 由曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho = \frac{2}{\sqrt{1+3\sin^2 \theta}}$, 平方化为

$\rho^2 + 3\rho^2 \sin^2 \theta = 4$, 利用 $\begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2 \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$ 即可化为直角坐标方程. (2) 将

$\begin{cases} x=2-\frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数) 代入 C_2 直角坐标方程得 $5t^2 - 12\sqrt{2}t + 8 = 0$, 利用

$|MA| \cdot |MB| = t_1 \cdot t_2$ 即可得出.

【解答】 解: (1) 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=2-\sqrt{2}t \\ y=-1+\sqrt{2}t \end{cases}$ (t 为参数), 消去参数 t 化

为 $x+y=1$;

由曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho = \frac{2}{\sqrt{1+3\sin^2 \theta}}$, 平方化为 $\rho^2 + 3\rho^2 \sin^2 \theta = 4$, $\therefore x^2 + 4y^2 = 4$,

化为直角坐标方程: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) 将 $\begin{cases} x=2-\frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数) 代入 C_2 直角坐标方程得 $5t^2 - 12\sqrt{2}t + 8 = 0$,

$$\therefore t_1 \cdot t_2 = \frac{8}{5},$$

$$\therefore |MA| \cdot |MB| = t_1 \cdot t_2 = \frac{8}{5}.$$

【点评】 本题考查了参数方程化为直角坐标方程、极坐标方程与直角坐标方程的互化、直线参数方程的应用, 考查了推理能力与计算能力, 属于中档题.

23. 已知函数 $f(x) = |x - a|$

(1) 若 $f(x) \leq m$ 的解集为 $[-1, 5]$, 求实数 a, m 的值

(2) 当 $a=2$ 且 $0 \leq t < 2$ 时, 解关于 x 的不等式 $f(x) + t \geq f(x+2)$

【分析】 (1) 根据绝对值不等式的解法建立条件关系即可求实数 a, m 的值.

(2) 根据绝对值的解法, 进行分段讨论即可得到不等式的解集.

【解答】 解: (1) $\because f(x) \leq m$,

$$\therefore |x - a| \leq m,$$

$$\text{即 } a - m \leq x \leq a + m,$$

$$\because f(x) \leq m \text{ 的解集为 } \{x | -1 \leq x \leq 5\},$$

$$\therefore \begin{cases} a - m = -1 \\ a + m = 5 \end{cases}, \text{ 解得 } a = 2, m = 3.$$

(2) 当 $a=2$ 时, 函数 $f(x) = |x - 2|$,

则不等式 $f(x) + t \geq f(x+2)$ 等价于 $|x - 2| + t \geq |x|$.

当 $x \geq 2$ 时, $x - 2 + t \geq x$, 即 $t \geq 2$ 与条件 $0 \leq t < 2$ 矛盾.

当 $0 \leq x < 2$ 时, $2 - x + t \geq x$, 即 $0 \leq x \leq \frac{t+2}{2}$, 成立.

当 $x < 0$ 时, $2 - x + t \geq -x$, 即 $t \geq -2$ 恒成立.

综上不等式的解集为 $(-\infty, \frac{t+2}{2}]$.

【点评】 本题主要考查绝对值不等式的解法, 要求熟练掌握绝对值的化简技巧.