

2011—2012 学年度下学期期末考试

高二年级数学(理) 试卷

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

(1) 设复数 z 满足 $z^2 = 5 - 12i$, 则 $|z| =$ ()

- A. 13 B. $\sqrt{119}$ C. $\sqrt{13}$ D. $2\sqrt{3}$

(2) 7 个身高均不相同的学生排成一排合影留念, 最高个子站在中间, 从中间到左边和从中间到右边一个比一个矮, 则这样的排法共有 ()

- A. 20 B. 40 C. 120 D. 400

(3) 某学生在最近的 15 次数学测验中有 5 次不及格, 按照这个成绩, 他在接下来的 10 次测验中, 恰好有 8 次及格的概率为 ()

- A. $C_{10}^8 \left(\frac{2}{3}\right)^8 \left(\frac{1}{3}\right)^2$ B. $C_{15}^8 \left(\frac{2}{3}\right)^8 \left(\frac{1}{3}\right)^7$ C. $C_{15}^8 \left(\frac{2}{3}\right)^7 \left(\frac{1}{3}\right)^8$ D. $C_{10}^8 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^8$

(4) 下列命题正确的个数为 ()

- ①斜线与它在平面内的射影所成的角是这条斜线和这个平面内所有直线所成的角的最小角。
- ②二面角 $\alpha - l - \beta$ 的平面角是过棱 l 上任一点 O , 分别在两个半平面内任意两条射线 OA, OB 所成的角 $\angle AOB$ 的最大角。
- ③如果一条直线和一个平面的一条斜线垂直, 那么它也和这条斜线在这个平面内的射影垂直。
- ④设 A 是空间一点, $\vec{n}$ 为空间任一非零向量, 适合条件的集合 $\{M \mid \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0\}$ 的所有点 M 构成的图形是过点 A 且与 $\vec{n}$ 垂直的一个平面。

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

(5) 设向量 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 是不共面的三个向量, 则下列各组向量不能作为空间向量基底的是 ()

- A. $\vec{p} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{q} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}, \quad \vec{r} = -3\vec{i} + 7\vec{j}$
- B. $\vec{p} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}, \quad \vec{q} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}, \quad \vec{r} = -7\vec{i} + 18\vec{j} + 22\vec{k}$
- C. $\vec{p} = \vec{i} + \vec{j}, \quad \vec{q} = \vec{i} + \vec{k}, \quad \vec{r} = \vec{j} + \vec{k}$
- D. $\vec{p} = \vec{i} + \vec{j}, \quad \vec{q} = \vec{i} - \vec{j}, \quad \vec{r} = \vec{k}$

(6) 已知 A, B, C 三点不共线, O 为平面 ABC 外一点, 下列哪个条件能判断点 M 不在平面 ABC 内 ()

- A. $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$ B. $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{OC}$
- C. $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$ D. $\overrightarrow{OM} = -2\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$

(7) 已知 $\left(x + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^n$ 展开式中, 第二项、第三项、第四项的二项式系数成等差数列,

则在 $\left(x + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^n$ 展开式中系数最大项是 ()

- A. 第 3 项 B. 第 4 项 C. 第 5 项 D. 第 6 项

(8) 设 A 为实数, 则下列算式一定正确的是 ()

- A. $(\cos A + i \sin A)^2 = \cos 2A + i \sin 2A$
- B. $(\cos A + i \sin A)^2 = 2 \cos A + i 2 \sin A$
- C. $(\cos A + i \sin A)^2 = \cos^2 A + i \sin^2 A$
- D. $(\cos A + i \sin A)^2 = \cos A + i \sin A$

(9) 随机变量 $X \sim N(u, \sigma^2)$, 则 X 在区间 $(u - \sigma, u + \sigma), (u - 2\sigma, u + 2\sigma)$,

$(u - 3\sigma, u + 3\sigma)$ 内的概率分别为 68.3%, 95.4%, 99.7%。已知一批 10000 只的白炽灯泡的光通量服从 $N(209, 6.5^2)$ ，则这样的 10000 只的灯泡的光通量在 $(209, 222)$ 内的个数大约为 ()

- A. 3415 B. 4770 C. 4985 D. 9540

(10) 一个家庭中有两个小孩，假定生男、生女是等可能的。已知这个家庭有一个是女孩，则此时另一个小孩是男孩得概率为 ()

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{1}{3}$

(11) 下列等式：① $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n = n \cdot 2^{n-1}$

$$\text{② } C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - \dots + (-1)^{n-1} nC_n^n = 0$$

$$\text{③ } 1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \dots + n \times n! = (n+1)! - 1$$

$$\text{④ } C_n^0 C_n^n + C_n^1 C_n^{n-1} + C_n^2 C_n^{n-2} + \dots + C_n^n C_n^0 = \frac{(2n)!}{n! \times n!}$$

其中正确的个数为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

(12) $(1+3x)(1+2x)^2(1+x)^3$ 展开式中，合并同类项后， x^3 的系数为 ()

- A. 80 B. 82 C. 84 D. 86

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分。

(13) 数一数，三棱锥、三棱柱、四棱锥、四棱柱，正方体，正八面体等的几何体的面数 (F)，顶点数 (V)，棱数 (E)，由此归纳出一般的凸多面体的面数 (F)，顶点数 (V)，棱数 (E) 满足的关系为：_____。

(14) 已知 $C_{10}^x = C_{10}^3$ 则 $x =$ _____。

(15) 若 $1+2i$ 是关于 x 的实系数方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a, b \in R)$ 的一个虚根，则这个方程的另一个虚根为_____。

(16) 已知平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E 是上底面 $A_1B_1C_1D_1$ (包括边界) 内

的任一点, 若 $\overrightarrow{AE} = x\overrightarrow{AA_1} + y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AD}$, 则 x, y, z 满足的关系式为: _____。

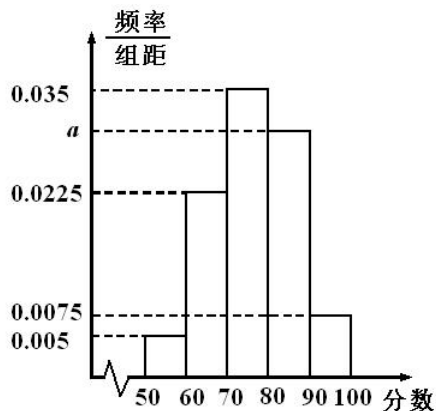
三、解答题: 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤。

(17) (本小题满分 12 分) 某班共有学生 40 人, 将一次数学考试成绩 (单位: 分) 绘制成频率分布直方图, 如图所示。

(I) 请根据图中所给数据, 求出 a 的值;

(II) 从成绩在 $[50, 70)$ 内的学生中随机选 3 名学生, 求这 3 名学生的成绩都在 $[60, 70)$ 内的概率;

(III) 为了了解学生本次考试的失分情况, 从成绩在 $[50, 70)$ 内的学生中随机选取 3 人的成绩进行分析,



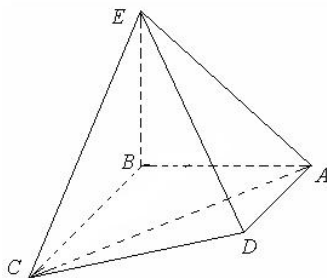
用 X 表示所选学生成绩在 $[60, 70)$ 内的人数, 求 X 的分布列和数学期望。

(18) (本小题满分 12 分) 在直角梯形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$,

$BE \perp$ 平面 $ABCD$, $AB = BC = BE = 2AD = 2$ 。

(I) 求异面直线 DE 与 AC 所成角的大小;

(II) 在线段 CE 上是否存在点 F , 使平面 $BDF \perp$ 平面 ADE , 若存在, 确定点 F 的位置, 若不存在, 请说明理由



(19)(本小题满分 12 分)某超市在一段时间内的某种商品的价格 x (元)与销售量 y (kg)

之间的一组数据如下表所示;

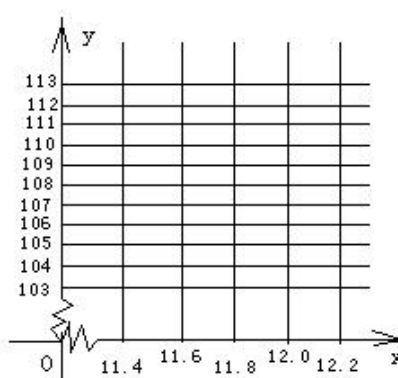
价格 x (元)	11.4	11.6	11.8	12.0	12.2
销售量 y (kg)	112	110	107	105	103

(I) 画出散点图;

(II) 求出 y 对 x 的回归的直线方程;

(III) 当价格定为 11.9 元时, 预测销售量大约是多少?

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}$$



(20)(本小题满分 12 分) 已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b} = 1 (0 < b < 4)$ 的右焦点为 F , 左右顶点分别为 C, A , 上顶点为 B , 过 B, C, F 作圆 P 。

(I) 当 $b = 1$ 时, 求圆 P 的方程;

(II) 求证: 直线 AB 与圆 P 不可能相切。

(21)(本小题满分 12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = \frac{(n+2)a_n^2 - na_n + n+1}{a_n^2 + 1} (n \in N_+)$,

且 $a_1 = 1$ 。

(I) 求 a_2, a_3, a_4 , 猜测 a_n 并证明;

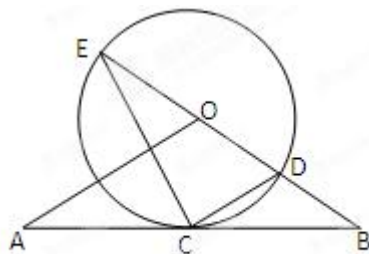
(II) 若 $b_n = 2^{a_n-1} + a_n - 1$, 且 b_n 的前 n 项和为 S_n , 试比较 S_n 与 $n^2 + n$ 的大小。

请考生在第 22、23、24 三题中任选一题做答，如果多做，则按所做的第一题记分。做答时用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应题号下方的方框涂黑。

(22) (本小题满分 10 分) 如图，直线 AB 经过 $\odot O$ 上的点 C ，并且 $OA = OB, CA = CB, \odot O$ 交直线 OB 于 E, D ，连接 EC, CD 。

(I) 求证：直线 AB 是 $\odot O$ 的切线；

(II) 若 $\tan \angle CED = \frac{1}{2}$ ， $\odot O$ 的半径为 3，求 OA 的长。



(23) (本小题满分 10 分) 直角坐标系 xOy 中，以原点为极点， x 轴的正半轴为极轴建

立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 4\cos\theta$ ，直线 l 的参数方程为
$$\begin{cases} x = -2 + \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y = \frac{1}{2}t \end{cases}$$

(t 为参数)，直线 l 与曲线 C 的公共点为 T 。

(I) 求点 T 的极坐标；

(II) 过点 T 作直线 l_1 ，若 l_1 被曲线 C 截得的线段长为 2，求直线 l_1 的极坐标方程。

(24) (本小题满分 10 分) 设函数 $f(x) = |2x - a| + 2a$ 。

(I) 若不等式 $f(x) \leq 6$ 的解集为 $\{x | -6 \leq x \leq 4\}$ ，求实数 a 的值；

(II) 在 (I) 的条件下，若不等式 $f(x) \leq (k^2 - 1)x - 5$ 的解集非空，求实数 k 的取值范围。