

椭圆的参数方程

一、教学目标

知识与能力：了解椭圆的参数方程及椭圆的意义。

过程与方法：能选取适当的参数，用参数方程解决椭圆的有关问题。

情感、态度、价值观：通过观察、探索、发现的创造性过程、培养创新意识。

二、教学重点及难点

重点：掌握椭圆的参数方程，形成参数思想并懂得参数法的基本运用。

难点：椭圆参数方程的形式及其参数的意义。

三、教学过程设计

复习：

圆 $x^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ 的参数方程

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (\theta \text{ 为参数 } 0 \leq \theta < 2\pi) \quad \theta \text{ 为旋转角}$$

引出新课：

一 椭圆的参数方程

问题 1 类比圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 的参数方程，得到椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的参数方程

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases} \quad (\theta \text{ 为参数 } 0 \leq \theta < 2\pi)$$

例题 1 把下列参数方程化为普通方程，普通方程化为参数方程：

(1) $\begin{cases} x = 3 \cos \varphi \\ y = 5 \sin \varphi \end{cases}$; (2) $\begin{cases} x = 8 \cos \varphi \\ y = 10 \sin \varphi \end{cases}$; (3) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$; (4) $x^2 + \frac{y^2}{16} = 1$.

二 参数 θ 的意义

例题 2 已知椭圆的参数方程为 $\begin{cases} x = 6 \cos \theta \\ y = 4 \sin \theta \end{cases}$ ，点 M 在椭圆上，对应参数 $\theta = \frac{\pi}{3}$ ，点 O 为原点，求

点 M 的坐标并求直线 OM 的倾斜角 α 。 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

问题 2: $\theta \neq \alpha$, 对参数 θ 进一步探讨

对上面所给出的椭圆的参数方程 $\begin{cases} x = 6\cos\theta \\ y = 4\sin\theta \end{cases}$, 在黑板上给出了直角坐标系和圆心在原点、半径分别为 6 和 4 的两个圆, 通过作图的方法在这个直角坐标系里找到点 M 吗?

几何画板演示

根据上面画椭圆的原理, 可以制作画椭圆的仪器, 称为椭圆规。

三 其它参数方程

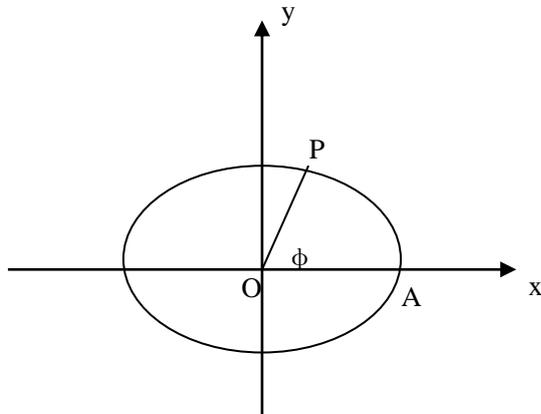
问题 3: 如图, 能否以 $\angle POA = \varphi$ 为参数, 建立椭圆的参数方程?

$$\text{由 } \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 & (0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, x > 0) \\ y = x \tan \varphi \end{cases}$$

可得 P 点在第一象限时的参数方程

$$\begin{cases} x = \frac{ab}{\sqrt{b^2 + a^2 \tan^2 \varphi}} \\ y = \frac{ab \tan \varphi}{\sqrt{b^2 + a^2 \tan^2 \varphi}} \end{cases} \quad (0 < \varphi < \frac{\pi}{2})$$

比较这两个参数方程



例 3 在椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 中作内接矩形, 问内接矩形的最大面积是多少。(一题多解)

小结:

类比圆的参数方程我们得到了椭圆的参数方程, 并探讨了其中参数的意义, 通过例 3 的解决我们能得到用椭圆的参数方程解决椭圆的最值问题的优势, 希望大家在以后的学习过程中注意体会。

作业: 教材课后题