高二周考数学试题

一．填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，共 70 分．不需写出解答过程．请把答案直接填写在答题纸相应位置上．

1．命题“若 a＞b，则 2^a＞2^b－1”的否命题为__▲__．

【答案】若 a≤b，则 2^a≤2^b－1

【解析】命题“若 a＞b，则 2^a＞2^b－1”的否命题为“若 a≤ b，则 2^a≤2^b－1”．

故答案为若 a≤b，则 2^a≤2^b－1．

2．若 $A=\left(-\infty,a\right]$，　$B=\left(1,2\right]$，　$A\cap B=B$，则 a 的取值范围是__▲__．

【答案】$\left[2,+\infty\right)$

【解析】因为 $A\cap B=B$ 所以 $B\subseteq A\Rightarrow a\geq 2$

3．已知 $f(x)=\begin{cases}x+1(x\leq -1),\\ x^2(-1<x<2),\\ 2x(x\geq 2),\end{cases}$ 若 $f(x)=3$，则 x 的值是__▲__．

【答案】$\sqrt{3}$

4．小明忘记了微信登陆密码的后两位，只记得最后一位是字母 A,a,B,b 中的一个，另一位是数字 4, 5, 6 中的一个，则小明输入一次密码能够成功登陆的概率是__▲__．

【答案】$\dfrac{1}{12}$

【解析】开机密码的可能有 $(4,A),(4,a),(4,B),(4,b),(5,A),(5,a),(5,B),(5,b),,$

$(6,A),(6,a),(6,B),(6,b),,$ 共 12 种可能, 所以小明输入一次密码能够成功登陆的概率是 $\dfrac{1}{12}$．

5．函数 $f(x)=(x+1)\ln x-4(x-1)$ 在（1，f（1））处的切线方程为__▲__．

【答案】$2x+y-2=0$

6．已知函数 $f(x+1)=\dfrac{f(x)}{1+f(x)}$，且 $f(1)=1$，则 $f(10)=$ __▲__．

【答案】$\dfrac{1}{10}$．

【解析】由题意得 $f(2)=\dfrac{f(1)}{1+f(1)}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$，　$f(3)=\dfrac{f(2)}{1+f(2)}=\dfrac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{3}$，

$f\left(4\right)=\dfrac{f\left(3\right)}{1+f\left(3\right)}=\dfrac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{4}$……….则 $f\left(n\right)=\dfrac{1}{n}$， $f\left(10\right)=\dfrac{1}{10}$. 故答案为： $\dfrac{1}{10}$.

7. 函数 $f\left(x\right)=x^2-2x-3$， $x\in\left[-4,4\right]$，任取一点 $x_0\in\left[-4,4\right]$，则 $f\left(x_0\right)\le 0$ 的概率为 ▲.

【答案】$\dfrac{1}{2}$

【解析】∵ $f\left(x_0\right)\le 0$，∴ ${x_0}^2-2x_0-3\le 0$，∴ $-1\le x_0\le 3$，即 $x_0\in\left[-1,3\right]$，

∵在定义域内任取一点 x_0，∴ $x_0\in\left[-4,4\right]$，

∴使 $f\left(x_0\right)\le 0$ 的概率 $P=\dfrac{3+1}{4+4}=\dfrac{1}{2}$，故答案为 $\dfrac{1}{2}$.

8. 已知函数 $f(x)=x^2-m\ln x$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增，则实数 m 的取值范围为 ▲. .

【答案】$(-\infty,8]$

【解析】$f'(x)=2x-\dfrac{m}{x}=\dfrac{2x^2-m}{x}\ge 0\Rightarrow m\le 2x^2$ 在 $[2,+\infty)$ 上恒成立 $\Rightarrow m\le 2\times 2^2=8$.

9. 已知集合 $\left\{a,b,c\right\}=\left\{0,1,2\right\}$，且下列三个关系：① $a\ne 2$，② $b=2$ ③ $c\ne 0$ 有且只有一个正确，则 $100a+10b+c=$ ▲.

【答案】201

【解析】由已知可得 $a=2,b=0,c=1\Rightarrow 100a+10b+c=201$.

10. 设 p：$\sqrt{2x-1}\le 1$，q：$(x-a)[x-(a-1)]\ge 0$，若 q 是 p 的必要不充分条件，则实数 a 的取值范围是 ▲.

【答案】$\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[2,+\infty\right)$

11. 设奇函数 $f(x)$ 是定义域在 R 上的减函数，且不等式 $f(x^2-a)+f(2x-1)<0$ 对于任意 $x\in[1，3]$恒成立，则实数 a 的取值范围是 ▲.

【答案】(-∞，2)

解：不等式 $f(x^2-a)+f(2x-1)<0$，即为 $f(x^2-a)<-f(2x-1)$，

由奇函数 $f(x)$，可得 $f(1-2x)=-f(2x-1)$，即有 $f(x^2-a)<f(1-2x)$，

由 $f(x)$ 为定义在 R 上的减函数，即有 $x^2-a>1-2x$，对任意 $x\in[1，3]$恒成立，

即为 $a<x^2-1+2x$ 对任意 $x\in[1，3]$恒成立，由 $x^2+2x-1=(x+1)^2-2$ 在[1，3]上递增，

当 x=1 时取得最小值 2， 即有 a＜2．

故答案为：（-∞，2）．

12．给出下列命题：①“若 $a \geq 0$，则 $x^2+x-a=0$ 有实根”的逆否命题为真命题：

②命题“$\forall x \in [1，2]$，$x^2-a \leq 0$”为真命题的一个充分不必要条件是 $a \geq 4$；

③命题“$\exists x \in R$，使得 $x^2-2x+1<0$”的否定是真命题；

④命题 p：函数 $y=e^x+e^{-x}$ 为偶函数；命题 q：函数 $y=e^x-e^{-x}$ 在 R 上为增函数，则 $p \wedge (\neg q)$ 为真命题．期中正确命题的序号是__▲__．

【答案】①③

【解析】①若 $a \geq 0$，则 $\Delta = 1+4a>0$，故 $x^2+x-a=0$ 有实根，原命题为真，所以逆否命题也为真，真确；②命题“$\forall x \in [1，2]$，$x^2-a \leq 0$”为真命题，则 $a \geq (x^2)_{\max} = 4$，所以 $a \geq 4$ 是充要条件，故不正确；③命题“$\exists x \in R$，使得 $x^2-2x+1<0$”的否定是 $\forall x \in R, x^2-2x+1 \geq 0$，成立；④函数 $y=e^x+e^{-x}$ 为偶函数成立，所以命题 p 为真，函数 $y=e^x-e^{-x}$ 在 R 上为增函数成立，命题 q 也为真，$\neg p$ 为假，所以 $p \wedge (\neg q)$ 为假命题，不正确；故答案为①③.

13．已知函数 $f(x)$ 为定义在 $[2-a,3]$ 上的偶函数，在 $[0,3]$ 上单调递减，并且 $f(-m^2-\frac{a}{5})>f(-m^2+2m-2)$，则 m 的取值范围是__▲__．

【答案】$1-\sqrt{2} \leq m < \frac{1}{2}$

【解析】由题设可得 $2-a+3=0$，即 $a=5$，故 $f(-m^2-1)>f(-m^2+2m-2)$ 可化为 $f(m^2+1)>f(m^2-2m+2)$，又 $1 \leq m^2+1 \leq 3, 1 \leq m^2-2m+2 \leq 3$，故 $m^2+1<m^2-2m+2 \Rightarrow m<\frac{1}{2}$，且 $m \geq 1-\sqrt{2}$．故应填答案 $1-\sqrt{2} \leq m < \frac{1}{2}$．

14．设函数 f（x）是定义在 R 上的偶函数，且对任意的 x∈R 恒有 f（x+1）=f（x-1），已知当 x∈[0，1]时，f（x）=2^x，则有

①2 是函数 f（x）的周期；

②函数 f（x）在（1，2）上是减函数，在（2，3）上是增函数；

③函数 f（x）的最大值是 1，最小值是 0．

其中所有正确的命题的序号是 ____▲____.

【答案】①②.

解：函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，且对任意 $x\in$R 恒有 $f(x+1)=f(x-1)$，已知当 $x\in[0,1]$时，$f(x)=2^x$，则有：

①∵对任意 $x\in$R 恒有 $f(x+1)=f(x-1)$，∴$f(x+2)=f(x)$，因此函数 $f(x)$ 的周期为 2，正确；

②∵函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，当 $x\in[0,1]$时，$f(x)=2^x$，则 $x\in[-1,0]$时，$f(x)=f(-x)=2^{-x}$，再根据①可得：此函数在区间（1，2）上是减函数，在区间（2，3）上是增函数，正确；

③由②可得：函数 $f(x)$ 的最大值是 2，最小值是 1，因此不正确.

其中所有正确命题的序号是①②.　故答案为：①②.

二．解答题:本大题共 6 小题，共 90 分.请在答题纸指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 已知集合 $A=\{x|-2\le x\le 4\},B=\{x|-m+1\le x\le 2m-1\}$.

（1）若 $m=2$，求 $A\cup B,A\cap(C_R B)$；

（2）若 $B\subseteq A$，求 m 的取值范围.

解析：（1）∵若 $m=2$，则 $B=\{x|-1\le x\le 3\}$，$A=\{x|-2\le x\le 4\}$，

∴ $C_R B=\{x|x<-1$ 或 $x>3\}$，∴ $A\cup B=\{x|-2\le x\le 4\}$，

∴ $A\cap(C_R B)=\{x|-2\le x<-1$ 或 $3<x\le 4\}$，

（2）∵ $B\subseteq A$，当 $B=\emptyset$ 时满足题意，即 $-m+1>2m-1$，解得 $m<\frac{2}{3}$

当 $B\ne\emptyset$ 时，则 $\begin{cases}-m+1\le 2m-1\\-m+1\ge -2\\2m-1\le 4\end{cases}$，解得 $\frac{2}{3}\le m\le\frac{5}{2}$，综上所述 m 的取值范围为 $(-\infty,\frac{5}{2}]$

16. 已知命题 p：关于 x 的方程 $x^2-ax+1=0$ 有实根；命题 q：对任意 $x\in[-1,1]$，不等式 $a^2-3a-x+1\le 0$ 恒成立，若“$p\wedge q$”是假命题，“$\neg q$”也是假命题，求实数 a 的取值范围；

解析：若 p 真，则 $\Delta=a^2-4\times 1\ge 0,\therefore a\le -2$ 或 $a\ge 2$.

若q真，则由对任意 x∈[-1，1]，不等式 $x-1\geqslant a^2-3a$ 恒成立

∴（x-1）$_{min}\geqslant a^2-3a$ 即 $a^2-3a\leqslant -2$ 解得 $1\leqslant a\leqslant 2$, 即q为真命题时，a 的取值范围是[1，2].

∵“$p\wedge q$”是假命题，“$\neg q$”也是假命题, 则p是假命题，q是真命题

$\therefore \begin{cases} -2 < a < 2 \\ 1 \le a \le 2 \end{cases}, \therefore 1 \le a < 2$，∴实数$a$的取值范围为$[1,2)$.

17. 某同学在用 120 分钟做 150 分的数学试卷（分为卷Ⅰ和卷Ⅱ两部分）时，卷Ⅰ和卷Ⅱ所得分数分别为 P 和 Q（单位：分），在每部分至少做了 20 分钟的条件下，发现它们与投入时间m（单位：分钟）的关系有经验公式$P=\frac{1}{5}m+36, Q=65+2\sqrt{3m}$.

（1）求数学总成绩y（单位：分）与对卷Ⅱ投入时间x（单位：分钟）的函数关系式及其定义域；

（2）如何计算使用时间，才能使所得分数最高？

解：（1）对卷Ⅱ用x分钟，则对卷Ⅰ用（120-x）分钟，

所以$y=P+Q=65+2\sqrt{3x}+\frac{1}{5}(120-x)+36=-\frac{1}{5}x+2\sqrt{3x}+125$ 其定义域为[20，100] --（7 分）

（2）令$t=\sqrt{x}\in\left[2\sqrt{5},10\right]$，

则函数为关于t的二次函数$y=-\frac{1}{5}t^2+2\sqrt{3}t+125=-\frac{1}{5}\left(t-5\sqrt{3}\right)^2+140$

所以当$t=5\sqrt{3}$，即x=75 时，y_{max}=140

答：当卷Ⅰ用 45 分钟，卷Ⅱ用 75 分钟时，所得分数最高------------（14 分）

18. 已知函数$f(x)$对任意实数x,y恒有$f(x+y)=f(x)+f(y)$，且当$x>0$时，$f(x)<0, f(1)=-2$

（1）判断$f(x)$的奇偶性

（2）求$f(x)$在区间$\left[-3,3\right]$上的值域

（3）若$\forall x\in R,$不等式$f(ax^2)-2f(x)<f(x)+4$恒成立，求a的取值范围.

解析：（1）奇函数；

令 $y=-x, \therefore f(0)=f(x)+f(-x)$ ，再令 $x=1, y=0, \therefore f(1)=f(0)+f(1)$

$\therefore f(0)=0, \therefore f(-x)=-f(x)$ 所以 $f(x)$ 为奇函数

（2）用定义证出函数的单调性，求出值域 $[-6,6]$

（3）由（1）可知 $f(-2)=4$ 原不等式可化为 $f(ax^2)<f(3x-2)$，由（2）可知函数为减函数，所以 $ax^2>3x-2$ 恒成立，所以 $\begin{cases} a>0 \\ \Delta<0 \end{cases}$，所以 $a>\dfrac{9}{8}$

19. 已知函数 $f(x)$ 对一切 $x,y\in R$ 都有 $f(x+y)-f(y)=x(x+2y+1)$ 成立，且 $f(1)=0$.

（1）求 $f(0)$ 的值;

（2）求 $f(x)$ 的解析式;

（3）已知 $a\in R$，设 P：当 $0\le x\le\dfrac{3}{4}$ 时，不等式 $f(x)+3<2x+a$ 恒成立，Q：当 $x\in[-2,2]$ 时，$g(x)=f(x)-ax$ 是单调函数，如果记使 P 成立的实数 a 的取值的集合为 A，使 Q 成立的实数 a 的取值的集合为 B，求 $A\cap C_R B$.

解析：（1）$f(x+y)-f(y)=x(x+2y+1)$，$f(1)=0$，取 $x=-1,y=1$ 得

$f(0)-f(1)=-(-1+2+1), f(0)=-2$

（2）取 $y=0$，得 $f(x)-f(0)=x(x+1)$，故 $f(x)=x^2+x-2$

（3）（i）当 $0\le x\le\dfrac{3}{4}$ 时，不等式 $f(x)+3<2x+a$ 恒成立，即 $x^2-x+1<a$ 恒成立

记 $h(x)=x^2-x+1$，对称轴 $x=\dfrac{1}{2}$，$h(x)_{\max}=h(0)=1$，

所以 $a>1$, 即 $A=(1,+\infty)$

（ii）$g(x)=x^2+(1-a)x-2$，对称轴：$x=\dfrac{a-1}{2}$，

由于 $x\in[-2,2]$ 时，$g(x)$ 是单调函数，所以 $\dfrac{a-1}{2}\le-2$, 或 $\dfrac{a-1}{2}\ge2$，解得 $a\le-3$, 或 $a\ge5$

即 $A=(-\infty,-3]\cup[5,+\infty)$，所以 $C_R B=(-3,5), A\cap(C_R B)=(1,5)$.

20. 已知函数 $f\left(x\right)=x-a\ln x$，$g\left(x\right)=-\dfrac{1+a}{x}$，其中 $a\in R$

（1）设函数 $h\left(x\right)=f\left(x\right)-g\left(x\right)$，求函数 $h\left(x\right)$ 的单调区间；

（2）若存在 $x_0\in\left[1,e\right]$，使得 $f\left(x_0\right)<g\left(x_0\right)$ 成立，求 a 的取值范围.

解析：

（1）$h\left(x\right)=x+\dfrac{1+a}{x}-a\ln x$，

$$h'\left(x\right)=1-\frac{1+a}{x}-\frac{a}{x}=\frac{x^2-ax-\left(1+a\right)}{x^2}=\frac{\left(x+1\right)\left[x-\left(1+a\right)\right]}{x^2}$$

①当 $a+1>0$ 时，即 $a>-1$ 时，在 $\left(0,1+a\right)$ 上 $h'\left(x\right)<0$，在 $\left(1+a,+\infty\right)$ 上 $h'\left(x\right)>0$

所以 $h\left(x\right)$ 在 $\left(0,1+a\right)$ 上单调递减，在 $\left(1+a,+\infty\right)$ 上单调递增；

②当 $1+a\le 0$，即 $a\le -1$ 时，在 $\left(0,+\infty\right)$ 上 $h'\left(x\right)>0$，

所以，函数 $h\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增.

（2）若存在 $x_0\in\left[1,e\right]$，使得 $f\left(x_0\right)<g\left(x_0\right)$ 成立，即存在 $x_0\in\left[1,e\right]$，使得 $h\left(x_0\right)=f\left(x_0\right)-g\left(x_0\right)<0$，即函数 $h\left(x\right)=x+\dfrac{1+a}{x}-a\ln x$ 在 $\left[1,e\right]$ 上的最小值小于零.

由（1）可知：

①当 $1+a\ge e$，即 $a\ge e-1$ 时，$h'\left(x\right)<0$，$h\left(x\right)$ 的 $\left[1,e\right]$ 上单调递减，

所以 $h\left(x\right)$ 的最小值为 $h\left(e\right)$，

由 $h\left(e\right)=e+\dfrac{1+a}{e}-a<0$ 可得 $a>\dfrac{e^2+1}{e-1}$，因为 $\dfrac{e^2+1}{e-1}>e-1$，所以 $a>\dfrac{e^2+1}{e-1}$.

②当 $1+a\le 1$，即 $a\le 0$ 时，$h\left(x\right)$ 在 $\left[1,e\right]$ 上单调递增，

所以 $h\left(x\right)$ 最小值为 $h\left(1\right)$，由 $h\left(1\right)=1+1+a<0$ 可得 $a<-2$.

③当 $1<1+a<e$，即 $1<a<e-1$ 时，可得 $h\left(x\right)$ 的最小值为 $h\left(1+a\right)$，

因为 $0<\ln\left(1+a\right)<1$，所以，$0<a\ln\left(1+a\right)<a$，故 $h\left(1+a\right)=2+a-a\ln\left(1+a\right)>2>0$，不合题意

综上可得所求 a 的范围是 $\left(-\infty,-2\right)\cup\left(\dfrac{e^2+1}{e-1},+\infty\right)$.