

高一（上）期末数学试卷

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.选项填涂在答题卡上.

1. 已知集合 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{3, 4, 6\}$, 那么 $(C_U A) \cap B$ 等于 ()

A. $\{2, 4, 6\}$ B. $\{4, 6\}$ C. $\{3, 4, 6\}$ D. $\{2, 3, 4, 6\}$

2. 下列函数与函数 $y=x$ 相等的是 ()

A. $y=(\sqrt{x})^2$ B. $y=\sqrt{x^2}$ C. $y=(\sqrt[3]{x})^3$ D. $y=\frac{x^2}{x}$

3. 下列大小关系正确的是 ()

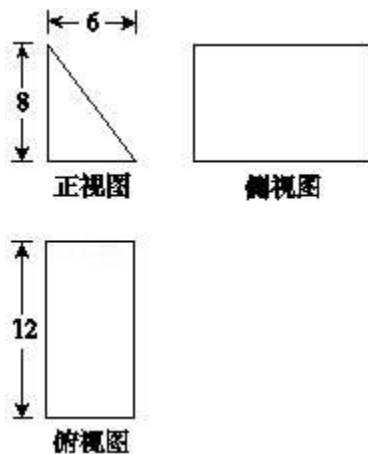
A. $0.4^3 < 3^{0.4} < \log_4 0.3$ B. $0.4^3 < \log_4 0.3 < 3^{0.4}$

C. $\log_4 0.3 < 0.4^3 < 3^{0.4}$ D. $\log_4 0.3 < 3^{0.4} < 0.4^3$

4. 已知平行四边形三个顶点的坐标分别为 $A(-3, 0)$, $B(2, -2)$, $C(5, 2)$, 则第四个顶点 D 的坐标不可能是 ()

A. $(10, 0)$ B. $(0, 4)$ C. $(-6, -4)$ D. $(6, -1)$

5. 一块石材表示的几何体的三视图如图所示，则它的体积等于 ()



A. 96 B. 192 C. 288 D. 576

6. 已知 $A(1, 3)$, $B(-5, 1)$, 以 AB 为直径的圆的标准方程是 ()

A. $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 10$ B. $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 40$ C. $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 10$
D. $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 40$

7. 函数 $f(x) = e^x - \frac{1}{x}$ 的零点所在的区间是 ()

- A. $(0, \frac{1}{2})$ B. $(\frac{1}{2}, 1)$ C. $(1, \frac{3}{2})$ D. $(\frac{3}{2}, 2)$

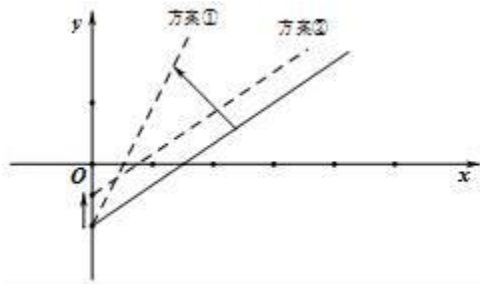
8. 设 a, b 是两条不同的直线, α 是一个平面, 则下列命题正确的是 ()

- A. 若 $a \parallel \alpha, b \subset \alpha$, 则 $a \parallel b$ B. 若 $a \parallel b, a \perp \alpha$, 则 $b \perp \alpha$
C. 若 $a \parallel b, a \parallel \alpha$, 则 $b \parallel \alpha$ D. 若 $a \perp b, a \perp \alpha$, 则 $b \parallel \alpha$

9. 经过点 $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 的圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的切线方程是 ()

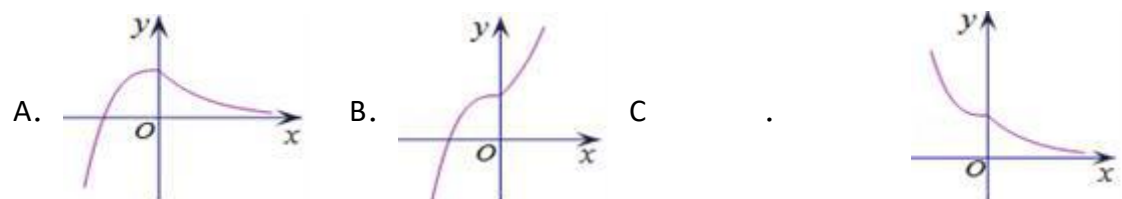
- A. $x + \sqrt{3}y = 2$ B. $\sqrt{3}x + y = 2$ C. $x + \sqrt{3}y = 1$ D. $\sqrt{3}x + y = 1$

10. 如图是某条公共汽车线路收支差额 y 与乘客量 x 的图象 (实线), 由于目前本线路亏损, 公司有关人员提出两种扭亏为盈的方案 (虚线), 这两种方案分别是 ()

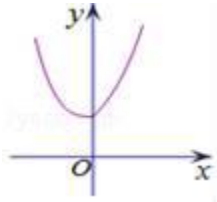


- A. 方案①降低成本, 票价不变, 方案②提高票价而成本不变;
B. 方案①提高票价而成本不变, 方案②降低成本, 票价不变;
C. 方案①降低成本, 票价提高, 方案②提高票价而成本不变;
D. 方案①提高成本, 票价不变, 方案②降低票价且成本降低

11. 函数 $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & x < 0 \\ (\frac{1}{3})^x, & x \geq 0 \end{cases}$ 的图象大致为 ()



D.



12. 定义在实数集 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 都可以写为一个奇函数 $g(x)$ 与一个偶函数 $h(x)$ 之和的形式, 如果 $f(x) = 2^x + 1$, 那么 ()

A. $g(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$, $h(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2}$

B. $g(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$, $h(x) = 1 + \frac{2^x + 2^{-x}}{2}$

C. $g(x) = 1 + \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$, $h(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2}$

D. $g(x) = \frac{2^x - 2^{-x} + 1}{2}$, $h(x) = \frac{2^x + 2^{-x} + 1}{2}$

二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 直线 $2x + ay = 2$ 与 $ax + (a+4)y = 1$ 垂直, 则 a 的值为_____.

14. 函数 $y = \sqrt{1 - \frac{1}{2^x}}$ 的定义域为_____.

15. 若函数 $f(x)$ 的图象和 $g(x) = \ln(2x)$ 的图象关于直线 $x - y = 0$ 对称, 则 $f(x)$ 的解析式为_____.

16. 已知侧棱长为 a 的正三棱锥 $P - ABC$ 的侧面都是直角三角形, 且四个顶点都在一个球面上, 则该球的表面积为_____.

三、解答题: (共 6 个题, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤. 共 70 分)

17. (1) 计算:
$$\frac{5x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}}}{\left(-\frac{1}{4}x^{-1}y^{\frac{1}{2}}\right)\left(-\frac{5}{6}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{6}}\right)};$$

(2) 已知 $\log_5 3 = a$, $\log_5 2 = b$, 用 a, b 表示 $\log_{25} 12$.

18. 已知直线 l 平行于直线 $3x + 4y - 7 = 0$, 并且与两坐标轴围成的 $\triangle OAB$ 的面积为 24,

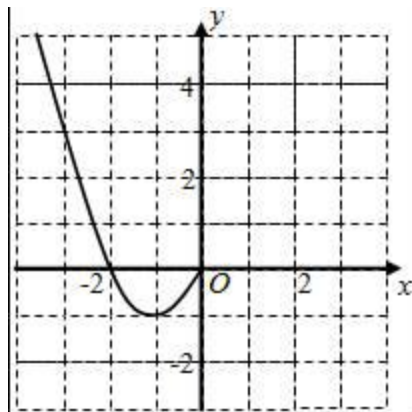
(I) 求直线 l 的方程;

(II) 求 $\triangle OAB$ 的内切圆的方程.

19. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数, 且当 $x \leq 0$ 时, $f(x) = x^2 + 2x$.

(1) 现已画出函数 $f(x)$ 在 y 轴左侧的图象, 如图所示, 请补出完整函数 $f(x)$ 的图象, 并根据图象写出函数 $f(x)$ 的增区间;

(2) 写出函数 $f(x)$ 的解析式和值域.



20. 已知以点 $A(-1, 2)$ 为圆心的圆与直线 $m: x + 2y + 7 = 0$ 相切, 过点 $B(-2, 0)$ 的动直线 l 与圆 A 相交于 M, N 两点

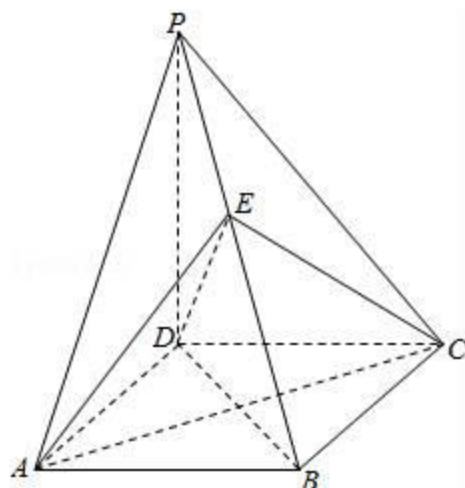
(1) 求圆 A 的方程.

(2) 当 $|MN| = 2\sqrt{19}$ 时, 求直线 l 方程.

21. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PD \perp$ 平面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 是菱形, $\angle BAD = 60^\circ$, $AB = 2$, $PD = \sqrt{6}$, O 为 AC 与 BD 的交点, E 为棱 PB 上一点.

(I) 证明: 平面 $EAC \perp$ 平面 PBD ;

(II) 若 $PD \parallel$ 平面 EAC , 求三棱锥 $P-EAD$ 的体积.



22. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 若对于任意的实数 x, y , 都有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 且 $x > 0$ 时, 有 $f(x) > 0$.

(I) 判断并证明函数 $f(x)$ 的奇偶性;

(II) 判断并证明函数 $f(x)$ 的单调性;

(III) 设 $f(1) = 1$, 若 $f(x) < m^2 - 2am + 1$ 对所有 $x \in [-1, 1]$, $a \in [-1, 1]$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

高一（上）期末数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.选项填涂在答题卡上.

1. 已知集合 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{3, 4, 6\}$, 那么 $(C_U A) \cap B$ 等于 ()

A. $\{2, 4, 6\}$ B. $\{4, 6\}$ C. $\{3, 4, 6\}$ D. $\{2, 3, 4, 6\}$

【考点】交、并、补集的混合运算.

【分析】根据补集和交集的定义写出运算结果即可.

【解答】解：集合 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

$A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{3, 4, 6\}$,

则 $C_U A=\{2, 4, 6\}$,

所以 $(C_U A) \cap B=\{4, 6\}$.

故选：B.

2. 下列函数与函数 $y=x$ 相等的是 ()

A. $y=(\sqrt{x})^2$ B. $y=\sqrt{x^2}$ C. $y=(\sqrt[3]{x})^3$ D. $y=\frac{x^2}{x}$

【考点】函数的概念及其构成要素.

【分析】已知函数的定义域是 R , 分别判断四个函数的定义域和对应关系是否和已知函数一致即可.

【解答】解：A. 函数的定义域为 $\{x|x \geq 0\}$, 两个函数的定义域不同.

B. 函数的定义域为 R , $y=|x|$, 对应关系不一致.

C. 函数的定义域为 R , 两个函数的定义域和对应关系相同, 是同一函数.

D. 函数的定义域为 $\{x|x \neq 0\}$, 两个函数的定义域不同.

故选 C.

3. 下列大小关系正确的是 ()

A. $0.4^3 < 3^{0.4} < \log_4 0.3$ B. $0.4^3 < \log_4 0.3 < 3^{0.4}$

C. $\log_4 0.3 < 0.4^3 < 3^{0.4}$ D. $\log_4 0.3 < 3^{0.4} < 0.4^3$

【考点】指数函数单调性的应用.

【分析】结合函数 $y=0.4^x$, $y=3^x$, $y=\log_4 x$ 的单调性判断各函数值与 0 和 1 的大小, 从而比较大小.

【解答】解: $\because 0 < 0.4^3 < 0.4^0 = 1$, $3^{0.4} > 3^0 = 1$, $\log_4 0.3 < \log_{0.4} 1 = 0$

$\therefore \log_4 0.3 < 0.4^3 < 3^{0.4}$

故选 C

4. 已知平行四边形三个顶点的坐标分别为 A (-3, 0), B (2, -2), C (5, 2), 则第四个顶点 D 的坐标不可能是 ()

A. (10, 0) B. (0, 4) C. (-6, -4) D. (6, -1)

【考点】中点坐标公式.

【分析】利用平行四边形的性质、斜率计算公式即可得出.

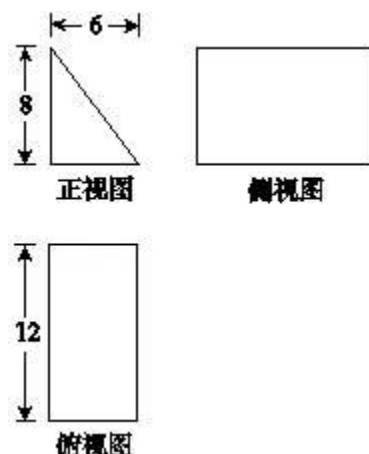
【解答】解: 由已知可得: $k_{AB}=k_{CD}$, $k_{AC}=k_{BD}$, $k_{AD}=k_{BC}$.

$k_{AB} = \frac{-2-0}{2-(-3)} = -\frac{2}{5}$, $k_{AC} = \frac{0-2}{-3-5} = \frac{1}{4}$, $k_{BC} = \frac{-2-2}{2-5} = \frac{4}{3}$.

经过验证可得: 不可能为: (6, -1).

故选: D.

5. 一块石材表示的几何体的三视图如图所示, 则它的体积等于 ()



A. 96 B. 192 C. 288 D. 576

【考点】棱柱、棱锥、棱台的体积；由三视图求面积、体积.

【分析】已知中的三视图，可得：该几何体是一个以主视图为底面的三棱柱，代入柱体的体积公式，可得答案.

【解答】解：已知中的三视图，可得：该几何体是一个以主视图为底面的三棱柱，其底面面积 $S = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24$,

高 $h = 12$,

故体积 $V = Sh = 288$,

故选：C

6. 已知 A (1, 3), B (-5, 1), 以 AB 为直径的圆的标准方程是 ()

A. $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 10$ B. $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 40$ C. $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 10$
D. $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 40$

【考点】圆的标准方程.

【分析】因为线段 AB 为所求圆的直径，所以利用中点坐标公式求出线段 AB 的中点即为所求圆的圆心坐标，再利用两点间的距离公式求出圆心 C 与点 A 之间的距离即为所求圆的半径，根据求出的圆心坐标与半径写出圆的标准方程即可.

【解答】解：∵ A (1, 3), B (-5, 1), 设圆心为 C,

∴ 圆心 C 的坐标为 C (-2, 2);

∴ $|AC| = \sqrt{10}$, 即圆的半径 $r = \sqrt{10}$,

则以线段 AB 为直径的圆的方程是 $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 10$.

故选 A.

7. 函数 $f(x) = e^x - \frac{1}{x}$ 的零点所在的区间是 ()

A. $(0, \frac{1}{2})$ B. $(\frac{1}{2}, 1)$ C. $(1, \frac{3}{2})$ D. $(\frac{3}{2}, 2)$

【考点】函数零点的判定定理.

【分析】根据零点存在定理，对照选项，只须验证 $f(0)$, $f(\frac{1}{2})$, $f(\frac{3}{2})$, 等的

符号情况即可．也可借助于图象分析：

画出函数 $y=e^x$ ， $y=\frac{1}{x}$ 的图象，由图得一个交点．

【解答】解：画出函数 $y=e^x$ ， $y=\frac{1}{x}$ 的图象：

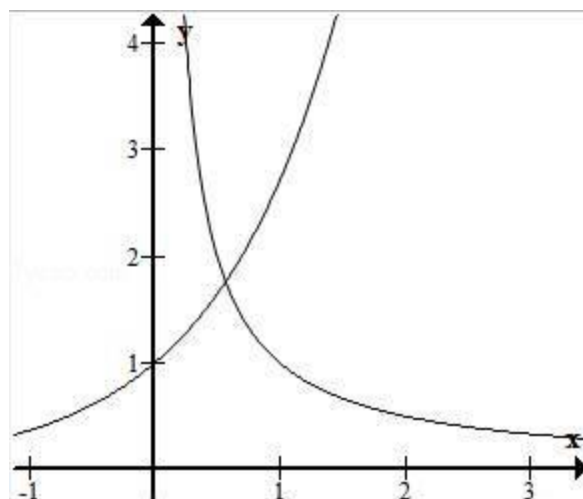
由图得一个交点，由于图的局限性，

下面从数量关系中找出答案．

$$\because f(1)=e^1-\frac{1}{1}=e-1\approx 2.71828-1=1.71828>0,$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=e^{\frac{1}{2}}-2<\sqrt{3}-2<0,$$

$\therefore$ 选 B.



8. 设 a ， b 是两条不同的直线， α 是一个平面，则下列命题正确的是（ ）

A. 若 $a\parallel\alpha$ ， $b\subset\alpha$ ，则 $a\parallel b$ B. 若 $a\parallel b$ ， $a\perp\alpha$ ，则 $b\perp\alpha$

C. 若 $a\parallel b$ ， $a\parallel\alpha$ ，则 $b\parallel\alpha$ D. 若 $a\perp b$ ， $a\perp\alpha$ ，则 $b\parallel\alpha$

【考点】空间中直线与平面之间的位置关系．

【分析】在 A 中， a 与 b 平行或异面；在 B 中，由线面垂直的判定定理得 $b\perp\alpha$ ；
在 C 中， b 与 α 相交、平行或 $b\subset\alpha$ ；在 D 中， $b\parallel\alpha$ 或 $b\subset\alpha$ ．

【解答】解：由 a ， b 是两条不同的直线， α 是一个平面，知：

在 A 中，若 $a\parallel\alpha$ ， $b\subset\alpha$ ，则 a 与 b 平行或异面，故 A 错误；

在 B 中，若 $a\parallel b$ ， $a\perp\alpha$ ，则由线面垂直的判定定理得 $b\perp\alpha$ ，故 B 正确；

在 C 中，若 $a\parallel b$ ， $a\parallel\alpha$ ，则 b 与 α 相交、平行或 $b\subset\alpha$ ，故 C 错误；

在 D 中，若 $a \perp b$ ， $a \perp \alpha$ ，则 $b \parallel \alpha$ 或 $b \subset \alpha$ ，故 D 错误.

故选：B.

9. 经过点 $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 的圆 $x^2+y^2=1$ 的切线方程是 ()

A. $x+\sqrt{3}y=2$ B. $\sqrt{3}x+y=2$ C. $x+\sqrt{3}y=1$ D. $\sqrt{3}x+y=1$

【考点】圆的切线方程.

【分析】直接利用圆上的点的切线方程，求出即可.

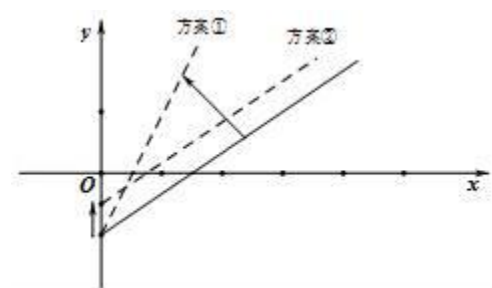
【解答】解：因为 $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 是圆 $x^2+y^2=1$ 上的点，

所以它的切线方程为： $\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 1$,

即： $x+\sqrt{3}y=2$,

故选 A.

10. 如图是某条公共汽车线路收支差额 y 与乘客量 x 的图象（实线），由于目前本线路亏损，公司有关人员提出两种扭亏为盈的方案（虚线），这两种方案分别是 ()



A. 方案①降低成本，票价不变，方案②提高票价而成本不变；

B. 方案①提高票价而成本不变，方案②降低成本，票价不变；

C. 方案①降低成本，票价提高，方案②提高票价而成本不变；

D. 方案①提高成本，票价不变，方案②降低票价且成本降低

【考点】函数的图象.

【分析】根据题意知图象反应了收支差额 y 与乘客量 x 的变化情况，即直线的斜率说明票价问题；当 $x=0$ 的点说明公司的成本情况，再结合图象进行说明.

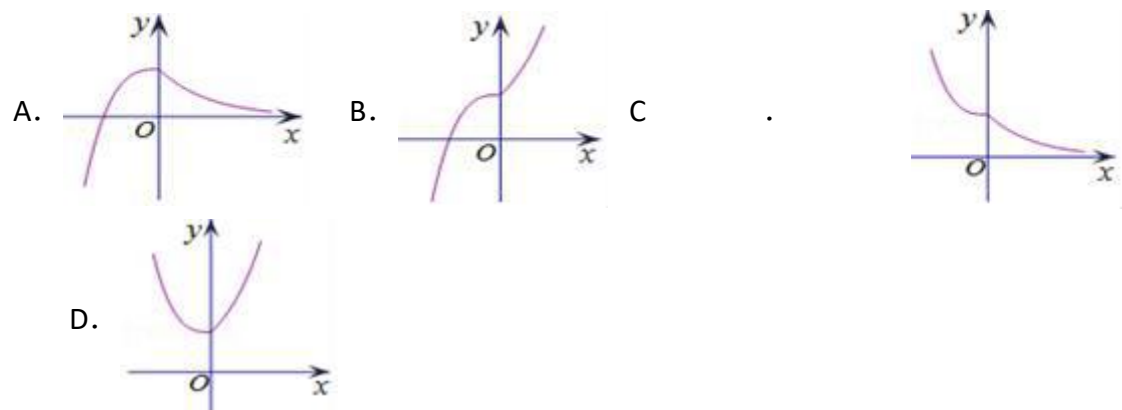
【解答】解：根据题意和图知，方案①：两直线平行即票价不变，直线向上平移

说明当乘客量为 0 时，收入是 0 但是支出的变少了，即说明了此建议是降低成本而保持票价不变；

由图看出，方案②：当乘客量为 0 时，支出不变，但是直线的倾斜角变大，即相同的乘客量时收入变大，即票价提高了，即说明了此建议是提高票价而保持成本不变，

故选：B.

11. 函数 $f(x) = \begin{cases} x^3+1, & x < 0 \\ (\frac{1}{3})^x, & x \geq 0 \end{cases}$ 的图象大致为 ()



【考点】函数的图象.

【分析】由题意， $x < 0$ 时，函数单调递增， $x \geq 0$ 时，函数单调递减，即可得出结论.

【解答】解：由题意， $x < 0$ 时，函数单调递增， $x \geq 0$ 时，函数单调递减，
故选 A.

12. 定义在实数集 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 都可以写为一个奇函数 $g(x)$ 与一个偶函数 $h(x)$ 之和的形式，如果 $f(x) = 2^x + 1$ ，那么 ()

A. $g(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$, $h(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2}$

B. $g(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$, $h(x) = 1 + \frac{2^x + 2^{-x}}{2}$

$$C. g(x)=1+\frac{2^x-2^{-x}}{2}, h(x)=\frac{2^x+2^{-x}}{2}$$

$$D. g(x)=\frac{2^x-2^{-x}+1}{2}, h(x)=\frac{2^x+2^{-x}+1}{2}$$

【考点】函数奇偶性的性质.

【分析】根据函数奇偶性的定义建立方程关系进行求解即可.

【解答】解：∵ $f(x)$ 都可以写为一个奇函数 $g(x)$ 与一个偶函数 $h(x)$ 之和的形式，

$$\therefore f(x) = g(x) + h(x),$$

$$\text{则 } f(-x) = g(-x) + h(-x) = -g(x) + h(x),$$

$$\text{则 } g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}, h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2},$$

$$\therefore f(x) = 2^x + 1,$$

$$\therefore g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}, h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = 1 + \frac{2^x + 2^{-x}}{2},$$

故选：B

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 直线 $2x+ay=2$ 与 $ax+(a+4)y=1$ 垂直，则 a 的值为 0 或 -6.

【考点】直线的一般式方程与直线的垂直关系.

【分析】根据两直线垂直时，一次项对应系数之积的和等于 0，求得 a 的值.

【解答】解：∵直线 $2x+ay=2$ 与 $ax+(a+4)y=1$ 垂直，

$$\therefore 2a+a(a+4)=0, \text{ 解得 } a=0 \text{ 或 } -6,$$

故答案为 0 或 -6.

14. 函数 $y=\sqrt{1-\frac{1}{2^x}}$ 的定义域为 $[0, +\infty)$.

【考点】函数的定义域及其求法.

【分析】由根式内部的代数式大于等于 0 求解指数不等式得答案.

【解答】解：由 $1 - \frac{1}{2^x} \geq 0$ ，得 $\frac{1}{2^x} \leq 1$ ，即 $2^x \geq 1$ ， $\therefore x \geq 0$ 。

$\therefore$ 函数 $y = \sqrt{1 - \frac{1}{2^x}}$ 的定义域为 $[0, +\infty)$ 。

故答案为： $[0, +\infty)$ 。

15. 若函数 $f(x)$ 的图象和 $g(x) = \ln(2x)$ 的图象关于直线 $x - y = 0$ 对称，则 $f(x)$ 的解析式为 $\frac{1}{2}e^x$ 。

【考点】函数解析式的求解及常用方法。

【分析】利用互为反函数的性质即可得出。

【解答】解： $\because$ 函数 $y = f(x)$ 的图象与 $g(x) = \ln(2x)$ 的图象关于 $x - y = 0$ 对称，

$\therefore f(x) = \frac{1}{2}e^x$ ，

故答案为： $\frac{1}{2}e^x$

16. 已知侧棱长为 a 的正三棱锥 $P - ABC$ 的侧面都是直角三角形，且四个顶点都在一个球面上，则该球的表面积为 $3\pi a^2$ 。

【考点】球的体积和表面积。

【分析】侧棱长为 a 的正三棱锥 $P - ABC$ 的侧面都是直角三角形，且四个顶点都在一个球面上，说明三棱锥的正方体的一个角，把三棱锥扩展为正方体，它们有相同的外接球，球的直径就是正方体的对角线，求出直径，即可求出球的表面积。

【解答】解：因为侧棱长为 a 的正三棱锥 $P - ABC$ 的侧面都是直角三角形，且四个顶点都在一个球面上，

三棱锥的正方体的一个角，把三棱锥扩展为正方体，它们有相同的外接球，

球的直径就是正方体的对角线，正方体的对角线长为： $\sqrt{3}a$ ；

所以球的表面积为： $4\pi \left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2 = 3\pi a^2$

故答案为： $3\pi a^2$ 。

三、解答题：（共 6 个题，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。共 70

分)

17. (1) 计算:
$$\frac{5x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{4}x^{-1}y^{\frac{1}{2}})(-\frac{5}{6}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{6}})};$$

(2) 已知 $\log_5 3 = a$, $\log_5 2 = b$, 用 a , b 表示 $\log_{25} 12$.

【考点】对数的运算性质; 有理数指数幂的化简求值.

【分析】(1) 利用有理数指数幂性质、运算法则求解.

(2) 利用对数性质、运算法则求解.

【解答】解: (1)
$$\frac{5x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{4}x^{-1}y^{\frac{1}{2}})(-\frac{5}{6}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{6}})}$$
$$= 5 \times (-4) \times (-\frac{6}{5}) \times x^{-\frac{2}{3}+1-\frac{1}{2}} \times y^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}$$
$$= 24 x^{-\frac{1}{6}} y^{\frac{1}{6}}.$$

(2) $\because \log_5 3 = a$, $\log_5 2 = b$,

$$\therefore \log_{25} 12 = \frac{\log_5 12}{\log_5 25} = \frac{\log_5 3 + 2\log_5 2}{2} = \frac{a+2b}{2}.$$

18. 已知直线 l 平行于直线 $3x+4y-7=0$, 并且与两坐标轴围成的 $\triangle OAB$ 的面积为 24,

(I) 求直线 l 的方程;

(II) 求 $\triangle OAB$ 的内切圆的方程.

【考点】直线与圆的位置关系; 待定系数法求直线方程.

【分析】(I) 设 $l: 3x+4y+m=0$, 利用直线与两坐标轴围成的 $\triangle OAB$ 的面积为 24, 即可求直线 l 的方程;

(II) $\triangle ABC$ 的内切圆半径 $r = \frac{6+8-10}{2} = 2$, 圆心 $(2, 2)$ 或 $(-2, -2)$, 即可求 $\triangle OAB$ 的内切圆的方程.

【解答】解: (I) 设 $l: 3x+4y+m=0$. - - - - -

当 $y=0$ 时, $x = -\frac{m}{3}$;

当 $x=0$ 时, $y = -\frac{m}{4}$.

∵ 直线 l 与两坐标轴围成的三角形面积为 24,

$$\therefore \frac{1}{2} \cdot \left| -\frac{m}{3} \right| \cdot \left| -\frac{m}{4} \right| = 24. \quad \text{-----}$$

$$\therefore m = \pm 24.$$

$$\therefore \text{直线 } l \text{ 的方程为 } 3x+4y+24=0 \text{ 或 } 3x+4y-24=0. \quad \text{-----}$$

$$\text{(II)} \because \text{直线 } l \text{ 的方程为 } \frac{x}{8} + \frac{y}{6} = \pm 1,$$

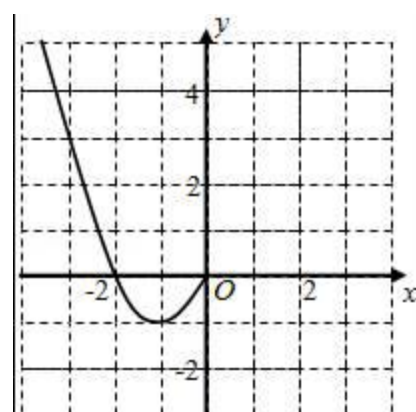
$$\therefore \triangle ABC \text{ 的内切圆半径 } r = \frac{6+8-10}{2} = 2, \text{ 圆心 } (2, 2) \text{ 或 } (-2, -2) \quad \text{-----}$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的内切圆的方程为 } (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4 \text{ 或 } (x+2)^2 + (y+2)^2 = 4 \quad \text{-----}$$

19. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数, 且当 $x \leq 0$ 时, $f(x) = x^2 + 2x$.

(1) 现已画出函数 $f(x)$ 在 y 轴左侧的图象, 如图所示, 请补出完整函数 $f(x)$ 的图象, 并根据图象写出函数 $f(x)$ 的增区间;

(2) 写出函数 $f(x)$ 的解析式和值域.



【考点】 二次函数的图象; 函数的值域; 函数解析式的求解及常用方法; 函数的单调性及单调区间.

【分析】(1) 因为函数为偶函数，故图象关于 y 轴对称，由此补出完整函数 $f(x)$ 的图象即可，再由图象直接可写出 $f(x)$ 的增区间.

(2) 可由图象利用待定系数法求出 $x > 0$ 时的解析式，也可利用偶函数求解析式，值域可从图形直接观察得到.

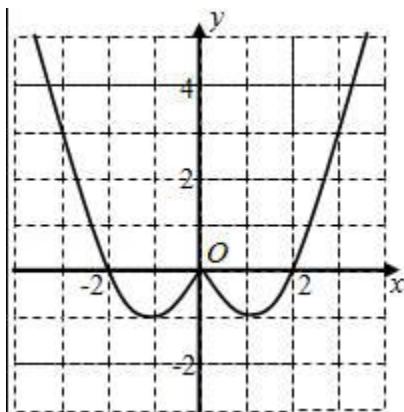
【解答】解：(1) 因为函数为偶函数，故图象关于 y 轴对称，补出完整函数图象如有图：

所以 $f(x)$ 的递增区间是 $(-1, 0)$, $(1, +\infty)$.

(2) 设 $x > 0$ ，则 $-x < 0$ ，所以 $f(-x) = x^2 - 2x$ ，因为 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，所以 $f(-x) = f(x)$ ，所以 $x > 0$ 时， $f(x) = x^2 - 2x$ ，

$$\text{故 } f(x) \text{ 的解析式为 } f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \leq 0 \\ x^2 - 2x, & x > 0 \end{cases}$$

值域为 $\{y | y \geq -1\}$



20. 已知以点 $A(-1, 2)$ 为圆心的圆与直线 $m: x + 2y + 7 = 0$ 相切，过点 $B(-2, 0)$ 的动直线 l 与圆 A 相交于 M 、 N 两点

(1) 求圆 A 的方程.

(2) 当 $|MN| = 2\sqrt{19}$ 时，求直线 l 方程.

【考点】直线与圆相交的性质.

【分析】(1) 利用圆心到直线的距离公式求圆的半径，从而求解圆的方程；

(2) 根据相交弦长公式，求出圆心到直线的距离，设出直线方程，再根据点到直线的距离公式确定直线方程.

【解答】解：(1) 意知 $A(-1, 2)$ 到直线 $x + 2y + 7 = 0$ 的距离为圆 A 半径 r ，

$$\therefore r = \frac{|-1+4+7|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore \text{圆 } A \text{ 方程为 } (x+1)^2 + (y-2)^2 = 20$$

(2) 垂径定理可知 $\angle MQA = 90^\circ$. 且 $MQ = \sqrt{19}$,

在 $\text{Rt}\triangle AMQ$ 中由勾股定理易知 $AQ = \sqrt{AM^2 - MQ^2} = 1$

设动直线 l 方程为: $y = k(x+2)$ 或 $x = -2$, 显然 $x = -2$ 合题意.

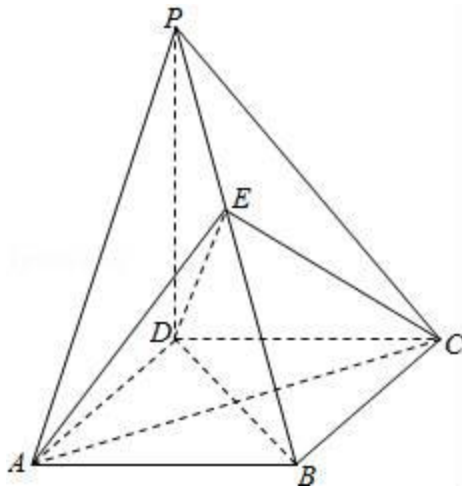
由 $A(-1, 2)$ 到 l 距离为 1 知 $\frac{|-k+2k-2|}{\sqrt{1+k^2}} = 1$ 得 $k = \frac{3}{4}$.

$\therefore 3x - 4y + 6 = 0$ 或 $x = -2$ 为所求 l 方程.

21. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PD \perp$ 平面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 是菱形, $\angle BAD = 60^\circ$, $AB = 2$, $PD = \sqrt{6}$, O 为 AC 与 BD 的交点, E 为棱 PB 上一点.

(I) 证明: 平面 $EAC \perp$ 平面 PBD ;

(II) 若 $PD \parallel$ 平面 EAC , 求三棱锥 $P-EAD$ 的体积.



【考点】 棱柱、棱锥、棱台的体积; 平面与平面垂直的判定.

【分析】 (I) 由已知得 $AC \perp PD$, $AC \perp BD$, 由此能证明平面 $EAC \perp$ 平面 PBD .

(II) 由已知得 $PD \parallel OE$, 取 AD 中点 H , 连结 BH , 由此利用

$V_{P-EAD} = V_{E-PAD} = \frac{1}{2} V_{B-PAD}$, 能求出三棱锥 $P-EAD$ 的体积.

【解答】 (I) 证明: $\because PD \perp$ 平面 $ABCD$, $AC \subset$ 平面 $ABCD$,

$\therefore AC \perp PD$. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形, $\therefore AC \perp BD$,

又 $\because PD \cap BD = D$, $AC \perp$ 平面 PBD .

而 $AC \subset \text{平面 } EAC$, $\therefore \text{平面 } EAC \perp \text{平面 } PBD$.

(II) 解: $\because PD \parallel \text{平面 } EAC$, $\text{平面 } EAC \cap \text{平面 } PBD = OE$,

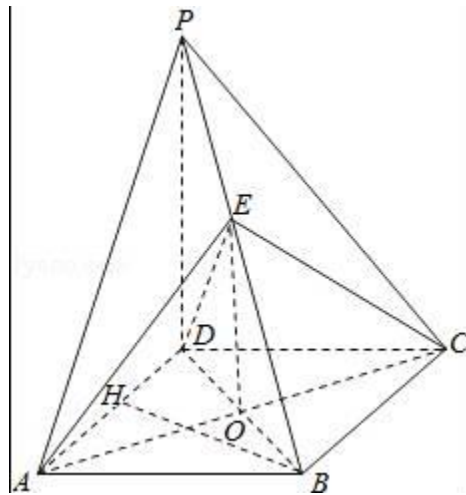
$\therefore PD \parallel OE$,

$\because O$ 是 BD 中点, $\therefore E$ 是 PB 中点.

取 AD 中点 H , 连结 BH , $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形, $\angle BAD = 60^\circ$,

$\therefore BH \perp AD$, 又 $BH \perp PD$, $AD \cap PD = D$, $\therefore BH \perp \text{平面 } PAD$, $BH = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \sqrt{3}$.

$$\begin{aligned} \therefore V_{P-EAD} &= V_{E-PAD} = \frac{1}{2} V_{B-PAD} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times S_{\triangle PAD} \times BH = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{6} \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$



22. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 若对于任意的实数 x, y , 都有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 且 $x > 0$ 时, 有 $f(x) > 0$.

(I) 判断并证明函数 $f(x)$ 的奇偶性;

(II) 判断并证明函数 $f(x)$ 的单调性;

(III) 设 $f(1) = 1$, 若 $f(x) < m^2 - 2am + 1$ 对所有 $x \in [-1, 1]$, $a \in [-1, 1]$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

【考点】 抽象函数及其应用.

【分析】 (I) $f(x)$ 为奇函数, 根据对于任意的实数 x, y , 都有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 分别令 $x=y=0$, $x=-y$, 可证得结论;

(II) $f(x)$ 为单调递增函数, 根据增函数的定义, 可证得结论;

(III) 设 $f(1) = 1$, 若 $f(x) < m^2 - 2am + 1$ 对所有 $x \in [-1, 1]$, $a \in [-1, 1]$ 恒成立, 只要 $m^2 - 2am + 1 > 1$, 即 $m^2 - 2am > 0$ 恒成立. 进而得到答案.

【解答】解: (I) $f(x)$ 为奇函数, 理由如下:

由题意知: $f(x+y) = x+y$, 令 $x=y=0$, 得 $f(0) = 0$

设 $x = -y$, 得 $f(0) = f(x) + f(-x)$

所以 $f(-x) = -f(x)$, 即 $f(x)$ 为奇函数. - - - - -
- - - - -

(II) $f(x)$ 为单调递增函数, 理由如下:

由题意知 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数, 设 $x_1 < x_2$,

则 $f(x_2) - f(x_1) = f(x_2) + f(-x_1) = f(x_2 - x_1)$,

当 $x > 0$ 时, 有 $f(x) > 0$, 所以 $f(x_2) > f(x_1)$,

故 $f(x)$ 在 R 上为单调递增函数. - - - - -

(III) 由 (2) 知 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上为单调递增函数,

所以 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的最大值为 $f(1) = 1$,

所以要使 $f(x) < m^2 - 2am + 1$ 对所有 $x \in [-1, 1]$, $a \in [-1, 1]$ 恒成立,

只要 $m^2 - 2am + 1 > 1$, 即 $m^2 - 2am > 0$ 恒成立.

令 $g(a) = m^2 - 2am = -2am + m^2$, 则 $\begin{cases} g(-1) > 0 \\ g(1) > 0 \end{cases}$,

即 $\begin{cases} 2m + m^2 > 0 \\ -2m + m^2 > 0 \end{cases}$, 解得 $m > 2$ 或 $m < -2$.

故实数 m 的取值范围是 $m > 2$ 或 $m < -2$. - - - - -