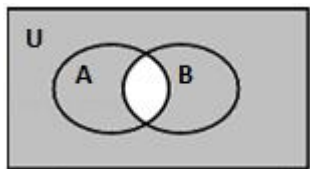


高一（上）第一次段考数学试卷

一、选择题（每小题 5 分，共 60 分）

1. 设 $U=\mathbb{R}$, $A=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B=\{x|x\geq 1\}$, 则 $A\cap \complement_U B=$ ()
A. $\{1, 2\}$ B. $\{-1, 0, 1\}$ C. $\{-2, -1, 0\}$ D. $\{-2, -1, 0, 1\}$
2. 设集合 $M=\{x||x|\leq 2, x\in\mathbb{R}\}$, $N=\{x|x^2\leq 4, x\in\mathbb{N}\}$, 则 ()
A. $M=N$ B. $M\subset N$ C. $M\supset N$ D. $M\cap N=\emptyset$
3. 设集合 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{2, 3, 5\}$, 则图中阴影部分表示的集合是 ()

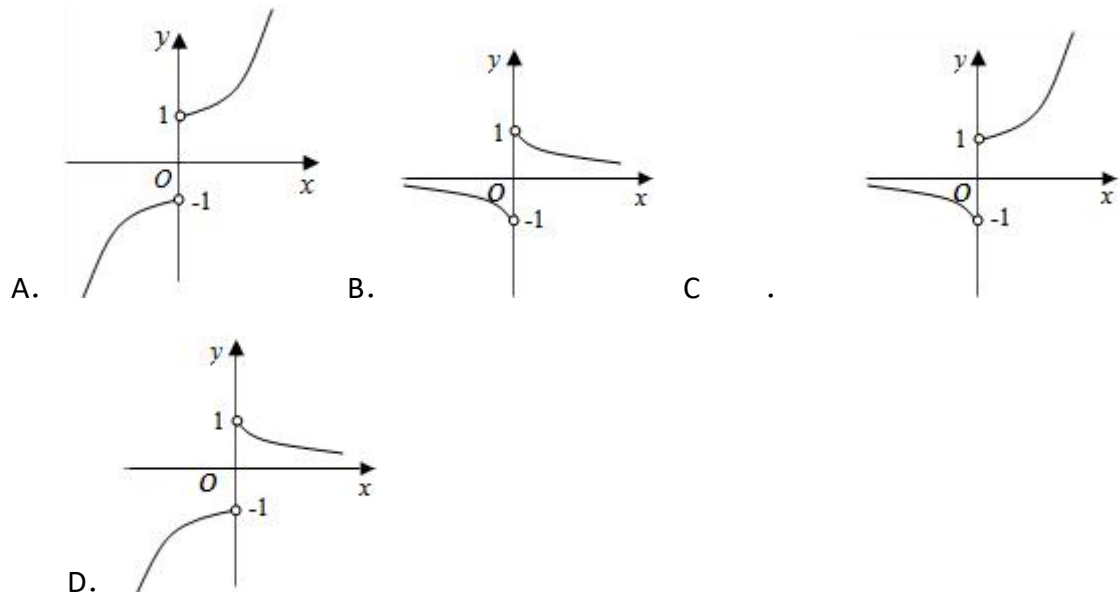


- A. $\{1, 2, 4\}$ B. $\{4\}$ C. $\{3, 5\}$ D. $\emptyset$
4. 已知集合 $A=\{1, 3, \sqrt{\pi}\}$, $B=\{1, m\}$, $A\cup B=A$, 则 m 的值为 ()
A. 0 或 $\sqrt{3}$ B. 0 或 3 C. 1 或 $\sqrt{3}$ D. 1 或 3
5. 下列四个函数中, 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数的是 ()
A. $f(x)=3-x$ B. $f(x)=x^2-3x$ C. $f(x)=\frac{1}{x+1}$ D. $f(x)=|x|$
6. 已知 $f(x+1)=x^2+1$, 则 $f(2)=$ ()
A. 5 B. 0 C. 3 D. 2
7. 已知 $a=\sqrt{0.4}$, $b=2^{0.4}$, $c=0.4^{0.2}$, 则 a, b, c 三者的大小关系是 ()
A. $b>c>a$ B. $b>a>c$ C. $a>b>c$ D. $c>b>a$
8. 已知函数 $f(x)=3^x - (\frac{1}{3})^x$, 则 $f(x)$ ()
A. 是偶函数, 且在 $\mathbb{R}$ 上是增函数 B. 是奇函数, 且在 $\mathbb{R}$ 上是增函数
C. 是偶函数, 且在 $\mathbb{R}$ 上是减函数 D. 是奇函数, 且在 $\mathbb{R}$ 上是减函数
9. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\leq 0 \\ -2x, & x>0 \end{cases}$, 若 $f(x)=17$, 则 $x=$ ()
A. $-\frac{17}{2}$ 或 -4 或 4 B. $-\frac{17}{2}$ 或 -4 C. -4 D. -4 或 4
10. 设函数 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 已知 $x\in(0, +\infty)$, $f(x)=2^x$, 则 $f(x)$ 在

$(-\infty, 0)$ 上是 ()

- A. 增函数且 $f(x) > 0$ B. 减函数且 $f(x) < 0$ C. 增函数且 $f(x) < 0$ D. 减函数且 $f(x) > 0$

11. 函数 $y = \frac{x a^x}{|x|} (a > 1)$ 的图象的大致形状是 ()



12. 对于函数 $f(x)$ 的定义域中任意的 $x_1, x_2 (x_1 \neq x_2)$, 有如下结论: ① $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$; ② $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$; ③ $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$; 当 $f(x) = 2^x$ 时, 上述结论中正确的有 () 个.

- A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

二、填空题 (每小题 5 分, 共 20 分)

13. 函数 $y = \frac{\sqrt{-x}}{2x^2 - 3x - 2}$ 的定义域是_____.

14. 若函数 $f(x) = a^x (0 < a \neq 1)$ 在 $[-1, 2]$ 上的最大值为 4, 最小值为 m , 则 $m =$ _____.

15. 已知函数 $f(x) = 2a - \frac{1}{3^x + 1} (a \in \mathbb{R})$ 为 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 则数 $a =$ _____.

16. 函数 $f(x)$ 的定义域为 A , 若 $x_1, x_2 \in A$ 且 $f(x_1) = f(x_2)$ 时总有 $x_1 = x_2$, 则称 $f(x)$ 为单函数. 例如, 函数 $f(x) = 2x + 1 (x \in \mathbb{R})$ 是单函数. 下列命题:

① 函数 $f(x) = x^2 (x \in \mathbb{R})$ 是单函数;

- ②若 $f(x)$ 为单函数, $x_1, x_2 \in A$ 且 $x_1 \neq x_2$, 则 $f(x_1) \neq f(x_2)$;
- ③若 $f: A \rightarrow B$ 为单函数, 则对于任意 $b \in B$, 它至多有一个原象;
- ④函数 $f(x)$ 在某区间上具有单调性, 则 $f(x)$ 一定是单函数.
- 其中的真命题是_____. (写出所有真命题的编号)

三、解答题 (共 6 小题, 合计 70 分)

17. (10 分) 化简:

$$(1) \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}} - (3^{0.5})^2 + (0.008)^{-\frac{2}{3}} \times \frac{2}{25};$$

$$(2) \frac{\sqrt{a^3 b^2} \sqrt[3]{ab^2}}{\left(\frac{1}{a^4} \frac{1}{b^2}\right)^4 \frac{1}{a} \frac{1}{b^3}} \quad (a > 0, b > 0).$$

18. (12 分) 若集合 $A = \{x \mid -2 < x < 4\}$, $B = \{x \mid x - m < 0\}$.

- (1) 若 $m=3$, 全集 $U=A \cup B$, 试求 $A \cap (C_U B)$;
- (2) 若 $A \cap B = A$, 求实数 m 的取值范围.

19. (12 分) 设函数 $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$.

- (1) 用定义证明函数 $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上是单调递减函数;
- (2) 求 $f(x)$ 在区间 $[3, 5]$ 上的最值.

20. (12 分) 已知 $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的增函数, 且满足 $f(xy) = f(x) + f(y)$, $f(2) = 1$.

- (1) 求 $f(8)$ 的值;
- (2) 求不等式 $f(x) - f(x-2) > 3$ 的解集.

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = 4^x - a \cdot 2^{x+1}$ ($-1 \leq x \leq 2$) 的最小值为 $g(a)$.

- (1) 求 $g(2)$ 的值;
- (2) 求 $g(a)$ 的解析式.

22. (12 分) 某产品生产厂家根据以往的生产销售经验得到下面有关销售的统计规律: 每生产产品 x (百台), 其总成本为 $G(x)$ 万元, 其中固定成本为 2 万元, 并且每生产 100 台的生产成本为 1 万元 (总成本=固定成本+生产成本), 销售收入 $R(x)$ 满足

$$R(x) = \begin{cases} -0.4x^2 + 4.2x - 0.8 & (0 \leq x \leq 5) \\ 10.2 & (x > 5) \end{cases}$$

假定该产品产销平衡, 那

么根据上述统计规律：

- (1) 要使工厂有盈利，产品数量 x 应控制在什么范围？
- (2) 工厂生产多少台产品时盈利最大？此时每台产品售价为多少？

高一（上）第一次段考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（每小题 5 分，共 60 分）

1. 设 $U=\mathbb{R}$, $A=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B=\{x|x\geq 1\}$, 则 $A\cap C_U B=$ ()

A. $\{1, 2\}$ B. $\{-1, 0, 1\}$ C. $\{-2, -1, 0\}$ D. $\{-2, -1, 0, 1\}$

【分析】根据补集与交集的定义，写出 $C_U B$ 与 $A\cap C_U B$ 即可.

【解答】解：因为全集 $U=\mathbb{R}$, 集合 $B=\{x|x\geq 1\}$,

所以 $C_U B=\{x|x<1\}=(-\infty, 1)$,

且集合 $A=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$,

所以 $A\cap C_U B=\{-2, -1, 0\}$

故选：C

【点评】本题考查了集合的定义与计算问题，是基础题目.

2. 设集合 $M=\{x||x|\leq 2, x\in\mathbb{R}\}$, $N=\{x|x^2\leq 4, x\in\mathbb{N}\}$, 则 ()

A. $M=N$ B. $M\subset N$ C. $M\supset N$ D. $M\cap N=\emptyset$

【分析】化简集合 M , N , 即可得出结论.

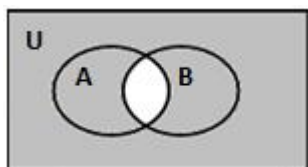
【解答】解： $M=\{x||x|\leq 2, x\in\mathbb{R}\}=[-2, 2]$, $N=\{x|x^2\leq 4, x\in\mathbb{N}\}=\{0, 1, 2\}$,

$\therefore M\supset N$,

故选 C.

【点评】本题考查集合的表示与关系，考查学生的计算能力，比较基础.

3. 设集合 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{2, 3, 5\}$, 则图中阴影部分表示的集合是 ()



A. $\{1, 2, 4\}$ B. $\{4\}$ C. $\{3, 5\}$ D. $\emptyset$

【分析】由图知，图中阴影部分表示的集合是 $C_U(A \cap B)$ 。

【解答】解：图中阴影部分表示的集合是 $C_U(A \cap B)$ ，

$$\because A \cap B = \{3, 5\},$$

$$\therefore C_U(A \cap B) = \{1, 2, 4\},$$

故选：A.

【点评】本题考查了集合运算的图形表示.

4. 已知集合 $A = \{1, 3, \sqrt{\pi}\}$, $B = \{1, m\}$, $A \cup B = A$, 则 m 的值为 ()

A. 0 或 $\sqrt{3}$ B. 0 或 3 C. 1 或 $\sqrt{3}$ D. 1 或 3

【分析】由题设条件中本题可先由条件 $A \cup B = A$ 得出 $B \subseteq A$, 由此判断出参数 m 可能的取值, 再进行验证即可得出答案选出正确选项.

【解答】解：由题意 $A \cup B = A$, 即 $B \subseteq A$, 又 $A = \{1, 3, \sqrt{\pi}\}$, $B = \{1, m\}$,

$$\therefore m = 3 \text{ 或 } m = \sqrt{\pi}, \text{ 解得 } m = 3 \text{ 或 } m = 0 \text{ 及 } m = 1,$$

验证知, $m = 1$ 不满足集合的互异性, 故 $m = 0$ 或 $m = 3$ 即为所求,

故选：B.

【点评】本题考查集合中参数取值问题, 解题的关键是将条件 $A \cup B = A$ 转化为 $B \subseteq A$, 再由集合的包含关系得出参数所可能的取值.

5. 下列四个函数中, 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数的是 ()

A. $f(x) = 3 - x$ B. $f(x) = x^2 - 3x$ C. $f(x) = \frac{1}{x+1}$ D. $f(x) = |x|$

【分析】利用基本函数的单调性判断选项即可.

【解答】解： $f(x) = 3 - x$ 是减函数；

$f(x) = x^2 - 3x$ 的对称轴为： $x = \frac{3}{2}$, 在 $(0, +\infty)$ 上不是增函数；

$f(x) = \frac{1}{x+1}$, 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数；

$f(x) = |x|$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数.

故选：D.

【点评】本题考查函数的单调性的应用, 基本函数的单调性是快速判断选项方法.

6. 已知 $f(x+1) = x^2 + 1$, 则 $f(2) = (\quad)$

A. 5 B. 0 C. 3 D. 2

【分析】由已知中 $f(x+1) = x^2 + 1$, 令 $x=1$ 可得: $f(2)$

【解答】解: $\because f(x+1) = x^2 + 1$,

令 $x=1$

则 $f(2) = 2$,

故选: D

【点评】本题考查的知识点是函数求值, 难度不大, 属于基础题.

7. 已知 $a = \sqrt{0.4}$, $b = 2^{0.4}$, $c = 0.4^{0.2}$, 则 a, b, c 三者的大小关系是 $(\quad)$

A. $b > c > a$ B. $b > a > c$ C. $a > b > c$ D. $c > b > a$

【分析】由于 $a \in (0, 1)$, $c \in (0, 1)$, $b = 2^{0.4} > 2^0 = 1$, 故 a, b, c 中, b 最大. 再根据函数 $y = 0.4^x$ 在 R 上是减函数, 故 $\sqrt{0.4} = 0.4^{0.5} < 0.4^{0.2} < 0.4^0 = 1$, 故 $c > a$, 由此得到结论.

【解答】解: $\because a = \sqrt{0.4} \in (0, 1)$, $b = 2^{0.4} > 2^0 = 1$, $c = 0.4^{0.2} \in (0, 1)$,

故 a, b, c 中, b 最大.

由于函数 $y = 0.4^x$ 在 R 上是减函数, 故 $\sqrt{0.4} = 0.4^{0.5} < 0.4^{0.2} < 0.4^0 = 1$,

$\therefore 1 > c > a$. 故有 $b > c > a$,

故选 A.

【点评】本题主要考查指数函数的单调性和特殊点, 属于基础题.

8. 已知函数 $f(x) = 3^x - \left(\frac{1}{3}\right)^x$, 则 $f(x)$ $(\quad)$

A. 是偶函数, 且在 R 上是增函数 B. 是奇函数, 且在 R 上是增函数
C. 是偶函数, 且在 R 上是减函数 D. 是奇函数, 且在 R 上是减函数

【分析】由已知得 $f(-x) = -f(x)$, 即函数 $f(x)$ 为奇函数, 由函数 $y = 3^x$ 为增函数, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 为减函数, 结合“增” - “减” = “增”可得答案.

【解答】解: $f(x) = 3^x - \left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^x - 3^{-x}$,

$\therefore f(-x) = 3^{-x} - 3^x = -f(x)$,

即函数 $f(x)$ 为奇函数，

又由函数 $y=3^x$ 为增函数， $y=(\frac{1}{3})^x$ 为减函数，

故函数 $f(x)=3^x-(\frac{1}{3})^x$ 为增函数，

故选：B.

【点评】 本题考查的知识点是函数的奇偶性，函数的单调性，是函数图象和性质的综合应用，难度不大，属于基础题.

9. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x \leq 0 \\ -2x, & x > 0 \end{cases}$ ，若 $f(x)=17$ ，则 $x=(\quad)$

A. $-\frac{17}{2}$ 或 -4 或 4 B. $-\frac{17}{2}$ 或 -4 C. -4 D. -4 或 4

【分析】 由已知函数为分段函数，并且 $x>0$ 时函数值为负数，所以使得 $f(x)=17$ 的 $x \leq 0$ 时的解析式，解方程可得.

【解答】 解：由题意， $f(x)=17$ ，即 $x^2+1=17$ ，且 $x \leq 0$ ，所以 $x=-4$ ；
故选 C.

【点评】 本题考查了分段函数的解析式；关键是明确使得等式成立的方程是对应的分段函数的 $x \leq 0$ 的解析式.

10. 设函数 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的奇函数，已知 $x \in (0, +\infty)$ ， $f(x)=2^x$ ，则 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是 $(\quad)$

A. 增函数且 $f(x)>0$ B. 减函数且 $f(x)<0$ C. 增函数且 $f(x)<0$ D. 减函数且 $f(x)>0$

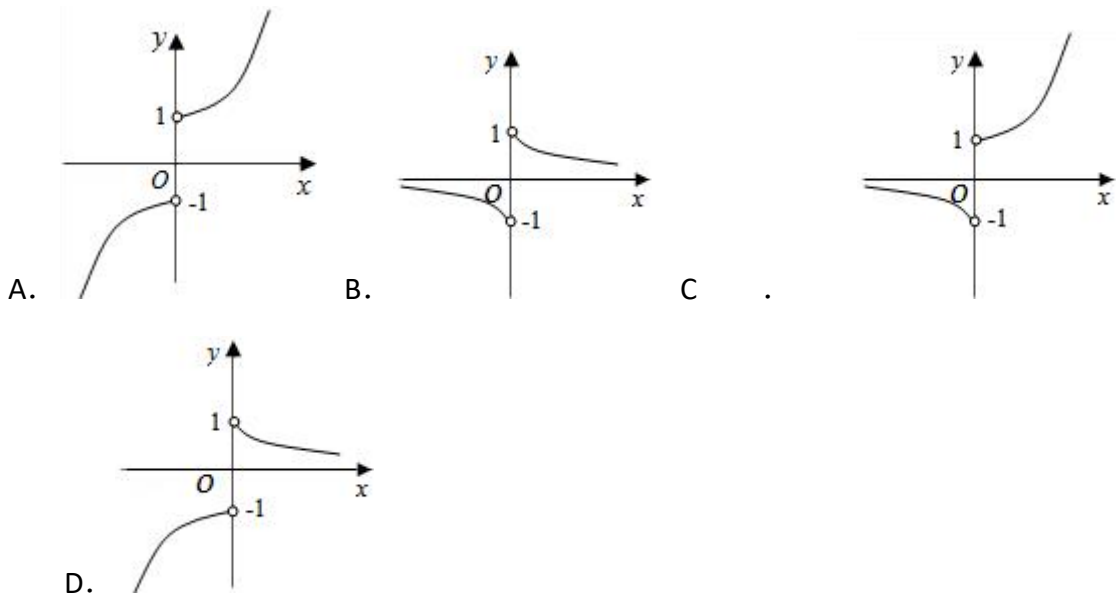
【分析】 分析指数函数的单调性及函数值域，结合奇函数在对称区间上单调性相同，函数值相反，可得答案.

【解答】 解： $\because x \in (0, +\infty)$ ， $f(x)=2^x$ ，
此时函数为增函数且 $f(x)>0$ ，
又由函数 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的奇函数，
奇函数在对称区间上单调性相同，函数值相反，
故 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是增函数且 $f(x)<0$ ，

故选：C.

【点评】本题考查的知识点是函数奇偶性的性质，熟练掌握函数奇偶性的性质，是解答的关键.

11. 函数 $y = \frac{x a^x}{|x|} (a > 1)$ 的图象的大致形状是 ()



【分析】先利用绝对值的概念去掉绝对值符号，将原函数化成分段函数的形式，再结合分段函数分析位于 y 轴左右两侧所表示的图象即可选出正确答案.

【解答】解： $\because y = \frac{x a^x}{|x|} = \begin{cases} a^x, & x > 0 \\ -a^x, & x < 0 \end{cases}$

当 $x > 0$ 时，其图象是指数函数 $y = a^x$ 在 y 轴右侧的部分，因为 $a > 1$ ，所以是增函数的形状，

当 $x < 0$ 时，其图象是函数 $y = -a^x$ 在 y 轴左侧的部分，因为 $a > 1$ ，所以是减函数的形状，

比较各选项中的图象知，C 符合题意

故选 C.

【点评】本题考查了绝对值、分段函数、函数的图象与图象的变换，培养学生画图的能力，属于基础题.

12. 对于函数 $f(x)$ 的定义域中任意的 $x_1, x_2 (x_1 \neq x_2)$ ，有如下结论：① $f(x_1 + x_2)$

$$=f(x_1) \cdot f(x_2); \textcircled{2} f(x_1 \bullet x_2) = f(x_1) + f(x_2); \textcircled{3} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0; \text{当 } f(x)$$

$=2^x$ 时, 上述结论中正确的有 () 个.

A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

【分析】利用函数的性质验证命题的真假即可.

【解答】解: 当 $f(x) = 2^x$ 时,

$$\textcircled{1} f(x_1 + x_2) = 2^{x_1 + x_2} = 2^{x_1} \cdot 2^{x_2} = f(x_1) \cdot f(x_2); \textcircled{1} \text{正确};$$

由①可知② $f(x_1 \bullet x_2) = f(x_1) + f(x_2)$; 不正确;

$$\textcircled{3} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0, \text{说明函数是增函数, 而 } f(x) = 2^x \text{ 是增函数, 所以 } \textcircled{3} \text{正确};$$

所以正确的结论有 2 个,

故选: B.

【点评】本题考查函数的基本性质的应用, 考查命题的真假的判断, 是基础题.

二、填空题 (每小题 5 分, 共 20 分)

$$13. \text{函数 } y = \frac{\sqrt{-x}}{2x^2 - 3x - 2} \text{ 的定义域是 } \underline{\{x | x \leq 0, \text{ 且 } x \neq -\frac{1}{2}\}}.$$

【分析】根据分式函数的分母不等于 0, 偶次根式被开方数大于等于 0, 建立不等式组, 解之即可求出函数的定义域.

$$\text{【解答】解: } \because y = \frac{\sqrt{-x}}{2x^2 - 3x - 2}$$

$$\therefore \begin{cases} -x \geq 0 \\ 2x^2 - 3x - 2 \neq 0 \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} x \leq 0 \\ x \neq 2 \text{ 且 } x \neq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\therefore \text{函数 } y = \frac{\sqrt{-x}}{2x^2 - 3x - 2} \text{ 的定义域是 } \{x | x \leq 0, \text{ 且 } x \neq -\frac{1}{2}\}$$

故答案为: $\{x | x \leq 0, \text{ 且 } x \neq -\frac{1}{2}\}$

【点评】本题主要考查了函数的定义域及其求法, 以及不等式的解法, 同时考查了计算能力, 属于基础题.

14. 若函数 $f(x) = a^x$ ($0 < a \neq 1$) 在 $[-1, 2]$ 上的最大值为 4, 最小值为 m , 则 $m = \underline{2 \text{ 或 } \frac{1}{4}}$.

【分析】按 $a > 1$, $0 < a < 1$ 两种情况进行讨论: 借助 $f(x)$ 的单调性及最大值先求出 a 值, 再求出其最小值即可.

【解答】解: ①当 $a > 1$ 时, $f(x)$ 在 $[-1, 2]$ 上单调递增, 则 $f(x)$ 的最大值为 $f(2) = a^2 = 4$, 解得: $a = 2$,

最小值 $m = f(-1) = \frac{1}{a} = \frac{1}{2}$;

②当 $0 < a < 1$ 时, $f(x)$ 在 $[-1, 2]$ 上单调递减,

则 $f(x)$ 的最大值为 $f(-1) = \frac{1}{a} = 4$, 解得 $a = \frac{1}{4}$,

此时最小值 $m = f(2) = a^2 = \frac{1}{16}$,

故答案为: $2 \text{ 或 } \frac{1}{4}$.

【点评】本题考查指数函数的单调性及其应用, 考查分类讨论思想, 对指数函数 $f(x) = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), 当 $a > 1$ 时 $f(x)$ 递增; 当 $0 < a < 1$ 时 $f(x)$ 递减.

15. 已知函数 $f(x) = 2a - \frac{1}{3^x + 1}$ ($a \in \mathbb{R}$) 为 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 则数 $a = \underline{\frac{1}{4}}$.

【分析】根据奇函数的性质 $f(0) = 0$ 即可得出 a 的值.

【解答】解: $\because f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的奇函数,

$\therefore f(0) = 2a - \frac{1}{2} = 0$,

$\therefore a = \frac{1}{4}$.

故答案为: $\frac{1}{4}$.

【点评】本题考查了奇函数的性质, 属于基础题.

16. 函数 $f(x)$ 的定义域为 A , 若 $x_1, x_2 \in A$ 且 $f(x_1) = f(x_2)$ 时总有 $x_1 = x_2$, 则称 $f(x)$ 为单函数. 例如, 函数 $f(x) = 2x + 1$ ($x \in \mathbb{R}$) 是单函数. 下列命题:

①函数 $f(x) = x^2$ ($x \in \mathbb{R}$) 是单函数;

②若 $f(x)$ 为单函数, $x_1, x_2 \in A$ 且 $x_1 \neq x_2$, 则 $f(x_1) \neq f(x_2)$;

③若 $f: A \rightarrow B$ 为单函数，则对于任意 $b \in B$ ，它至多有一个原象；

④函数 $f(x)$ 在某区间上具有单调性，则 $f(x)$ 一定是单函数.

其中的真命题是 ②③. (写出所有真命题的编号)

【分析】 根据单函数的定义 $f(x_1) = f(x_2)$ 时总有 $x_1 = x_2$ ，可知函数 $f(x)$ 则对于任意 $b \in B$ ，它至多有一个原象，而①④ $f(-1) = f(1)$ ，显然 $-1 \neq 1$ ，可知它不是单函数，②③都是，可得结果.

【解答】 解：∵若 $x_1, x_2 \in A$ ，且 $f(x_1) = f(x_2)$ 时总有 $x_1 = x_2$ ，则称 $f(x)$ 为单函数

∴①函数 $f(x) = x^2$ 不是单函数，

∵ $f(-1) = f(1)$ ，显然 $-1 \neq 1$ ，

∴函数 $f(x) = x^2 (x \in \mathbb{R})$ 不是单函数；

②∵函数 $f(x) = 2^x (x \in \mathbb{R})$ 是增函数，

∴ $f(x_1) = f(x_2)$ 时总有 $x_1 = x_2$ ，

即②正确；

③∵ $f(x)$ 为单函数，对于任意 $b \in B$ ，

若 $\exists x_1 \neq x_2$ ，使得 $f(x_1) = f(x_2) = b$ ，

则 $x_1 = x_2$ ，与 $x_1 \neq x_2$ 矛盾

∴③正确；

④例如①函数 $f(x) = x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数，而它不是单函数；故④不正确.

故答案为：②③.

【点评】 此题是个基础题. 考查学生分析解决问题的能力，以及知识方法的迁移能力.

三、解答题（共 6 小题，合计 70 分）

17. (10 分) 化简：

$$(1) \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}} - (3^{0.5})^2 + (0.008)^{-\frac{2}{3}} \times \frac{2}{25};$$

$$(2) \frac{\sqrt{a^3 b^2} \sqrt[3]{ab^2}}{\left(a^{\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{2}}\right)^4 a^{-\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}}} \quad (a > 0, b > 0).$$

【分析】(1) (2) 都是根据指数的运算性质计算可得答案.

【解 答】解：(1)

$$\begin{aligned} \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}} - (3^{0.5})^2 + (0.008)^{-\frac{2}{3}} \times \frac{2}{25} &= \left[\left(\frac{3}{2}\right)^3\right]^{\frac{1}{3}} - (3^{\frac{1}{2}})^2 + [(0.2)^3]^{-\frac{2}{3}} \times \frac{2}{25} \\ &= \frac{3}{2} - 3 + 25 \times \frac{2}{25} = \frac{1}{2}; \end{aligned}$$

(2) $\because a > 0, b > 0,$

$$\therefore \frac{\sqrt{a^3 b^2} \sqrt[3]{ab^2}}{\left(a^{\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{2}}\right)^4 a^{-\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}}} = \frac{(a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{2}{3}} a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{2} + \frac{1}{6} - 1 + \frac{1}{3}} b^{1 + \frac{1}{3} - 2 - \frac{1}{3}}} = ab^{-1} = \frac{a}{b}.$$

【点评】本题考查了有理指数幂的化简求值，考查了指数的运算性质，是基础题.

18. (12 分) 若集合 $A = \{x \mid -2 < x < 4\}$, $B = \{x \mid x - m < 0\}$.

(1) 若 $m=3$, 全集 $U=A \cup B$, 试求 $A \cap (C_U B)$;

(2) 若 $A \cap B = A$, 求实数 m 的取值范围.

【分析】(1) 根据集合的基本运算求 $A \cup B$, 即可求 $(C_U B) \cap A$;

(2) 根据 $A \cap B = A$, 建立条件关系即可求实数 m 的取值范围.

【解答】解 集合 $A = \{x \mid -2 < x < 4\}$, $B = \{x \mid x - m < 0\}$.

(1) 当 $m=3$ 时, 由 $x - m < 0$, 得 $x < 3$,

$$\therefore B = \{x \mid x < 3\},$$

$$\therefore U = A \cup B = \{x \mid x < 4\},$$

$$\text{那么 } C_U B = \{x \mid 3 \leq x < 4\}.$$

$$\therefore A \cap (C_U B) = \{x \mid 3 \leq x < 4\}.$$

(2) $\because A = \{x \mid -2 < x < 4\}$, $B = \{x \mid x < m\}$,

$$\therefore A \cap B = A,$$

$$\therefore A \subseteq B,$$

故： $m \geq 4$.

【点评】 本题主要考查集合的基本运算，比较基础.

19. (12 分) 设函数 $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$.

(1) 用定义证明函数 $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上是单调递减函数;

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $[3, 5]$ 上的最值.

【分析】 (1) 利用定义证明即可;

(2) 根据单调性即可得在区间 $[3, 5]$ 上的最值.

【解答】 解：函数 $f(x) = \frac{x+2}{x-1} = 1 + \frac{3}{x-1}$

(1) 证明：任取 $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ ，并且 $x_1 < x_2$ ，则 $x_1 - x_2 < 0$

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{3}{x_1-1} - \frac{3}{x_2-1} = \frac{3(x_2-x_1)}{(x_1-1)(x_2-1)}$$

$$\because x_1 > 1, x_2 > 1$$

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0$$

$$f(x_1) - f(x_2) > 0$$

$$\text{即 } f(x_1) > f(x_2),$$

故函数 $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上是单调递减函数;

(2) 由 (1) 可知函数 $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上是单调递减函数;

$\therefore f(x)$ 在 $[3, 5]$ 上也是单调减函数,

$$\therefore f_{\max} = f(3) = \frac{5}{2}; \quad f_{\min} = f(5) = \frac{7}{4}.$$

【点评】 本题考查的是函数单调性的问题. 在解答的过程当中充分体现了函数单调性的定义、作差法、函数的最值.

20. (12 分) 已知 $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的增函数，且满足 $f(xy) = f(x) + f(y)$ ， $f(2) = 1$.

(1) 求 $f(8)$ 的值;

(2) 求不等式 $f(x) - f(x-2) > 3$ 的解集.

【分析】 (1) 利用抽象函数的关系式，化简求解即可.

(2) 化简不等式利用抽象函数, 以及函数的单调性求解即可.

【解答】解: (1) 由题意得

$$f(8) = f(4 \times 2) = f(4) + f(2)$$

$$= f(2 \times 2) + f(2)$$

$$= f(2) + f(2) + f(2)$$

$$= 3f(2)$$

$$\text{又} \because f(2) = 1,$$

$$\therefore f(8) = 3;$$

$$(2) \text{ 不等式化为 } f(x) > f(x-2) + 3$$

$$\because f(8) = 3, \therefore f(x) > f(x-2) + f(8) = f(8x-16)$$

$\because f(x)$ 是 $(0, +\infty)$ 上的增函数,

$$\therefore \begin{cases} 8(x-2) > 0 \\ x > 8(x-2) \end{cases},$$

$$\text{解得 } 2 < x < \frac{16}{7}.$$

$$\text{不等式的解集为: } \{x | 2 < x < \frac{16}{7}\}.$$

【点评】 本题考查抽象函数的应用, 函数值的求法, 考查计算能力.

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = 4^x - a \cdot 2^{x+1}$ ($-1 \leq x \leq 2$) 的最小值为 $g(a)$.

(1) 求 $g(2)$ 的值;

(2) 求 $g(a)$ 的解析式.

【分析】 (1) (2) 利用换元法转化为二次函数问题讨论最小值. 可得 $g(2)$ 的值和 $g(a)$ 的解析式

【解答】 解: (1) 设 $t = 2^x$, 因为 $-1 \leq x \leq 2$,

$$\text{所以 } \frac{1}{2} \leq t \leq 4,$$

$$\text{所以 } y = t^2 - 2at.$$

对称轴 $t = a$.

$$\text{当 } a = 2 \text{ 时, } y = t^2 - 4t = (t - 2)^2 - 4$$

所以 $t = 2$ 时, y 取最小值 -4 .

所以 $g(2) = -4$;

(2) 因为 $y = t^2 - 2at$,

对称轴 $t = a$, $\frac{1}{2} \leq t \leq 4$,

所以 当 $\frac{1}{2} \leq a \leq 4$ 时, 即 $t = a$ 时 y 取最小值 $-a^2$. 所以 $g(a) = -a^2$;

当 $a < \frac{1}{2}$ 时, $t = \frac{1}{2}$ 时, y 取最小值 $\frac{1}{4} - a$, 所以 $g(a) = \frac{1}{4} - a$;

当 $a > 4$, $t = 4$ 时, y 取最小值 $16 - 8a$, 所以 $g(a) = 16 - 8a$;

$$\text{综上所述 } g(a) = \begin{cases} \frac{1}{4} - a, & a < \frac{1}{2} \\ -a^2, & \frac{1}{2} \leq a \leq 4 \\ 16 - 8a, & a > 4 \end{cases}.$$

【点评】 本题考查的知识点是函数的转化思想, 二次函数的图象和性质最值的讨论. 属于中档题.

22. (12 分) 某产品生产厂家根据以往的生产销售经验得到下面有关销售的统计规律: 每生产产品 x (百台), 其总成本为 $G(x)$ 万元, 其中固定成本为 2 万元, 并且每生产 100 台的生产成本为 1 万元 (总成本=固定成本+生产成本), 销售收入 $R(x)$ 满足 $R(x) = \begin{cases} -0.4x^2 + 4.2x - 0.8 & (0 \leq x \leq 5) \\ 10.2 & (x > 5) \end{cases}$, 假定该产品产销平衡, 那么根据上述统计规律:

么根据上述统计规律:

(1) 要使工厂有盈利, 产品数量 x 应控制在什么范围?

(2) 工厂生产多少台产品时盈利最大? 此时每台产品售价为多少?

【分析】 (1) 根据利润=销售收入-总成本, 列出解析式; 要使工厂有赢利, 即解不等式 $f(x) > 0$, 分 $0 \leq x \leq 5$ 时和 $x > 5$ 时分别求解即可;

(2) 分别求出 $0 \leq x \leq 5$ 时和 $x > 5$ 时 $f(x)$ 的最大值, 取最大的即可.

【解答】 解: 依题意, $G(x) = x + 2$, 设利润函数为 $f(x)$, 则

$$f(x) = R(x) - G(x) = \begin{cases} -0.4x^2 + 3.2x - 2.8, & (0 \leq x \leq 5) \\ 8.2 - x, & (x > 5) \end{cases}$$

(1) 要使工厂有赢利, 即解不等式 $f(x) > 0$, 当 $0 \leq x \leq 5$ 时, 解不等式 $-0.4x^2 + 3.2x - 2.8 > 0$.

即 $x^2 - 8x + 7 < 0$.

$\therefore 1 < x < 7$, $\therefore 1 < x \leq 5$. (2 分)

当 $x > 5$ 时, 解不等式 $8.2 - x > 0$, 得 $x < 8.2$.

$\therefore 5 < x < 8.2$.

综上, 要使工厂赢利, x 应满足 $1 < x < 8.2$,

即产品应控制在大于 100 台, 小于 820 台的范围内.

(2) $0 \leq x \leq 5$ 时, $f(x) = -0.4(x - 4)^2 + 3.6$,

故当 $x=4$ 时, $f(x)$ 有最大值 3.6.

而当 $x > 5$ 时, $f(x) < 8.2 - 5 = 3.2$ 所以, 当工厂生产 400 万台产品时, 赢利最多.

又 $x=4$ 时, $\frac{R(4)}{4} = 240$ (元/台),

故此时每台产品售价为 240 (元/台).

【点评】 本题考查利用函数知识解决应用题的有关知识. 新高考中的重要的理念就是把数学知识运用到实际生活中, 如何建模是解决这类问题的关键. 同时要熟练地掌握分段函数的求最值问题及解不等式问题.