

2016-2017 学年高一（上）期末数学试卷

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分）

1. 已知集合 $M = \{x | \log_3 x \leq 1\}$ ， $N = \{x | x^2 + x - 2 \leq 0\}$ ，则 $M \cap N$ 等于（ ）

A. $\{x | -2 \leq x \leq 1\}$ B. $\{x | 1 \leq x \leq 3\}$ C. $\{x | 0 < x \leq 1\}$ D. $\{x | 0 < x \leq 3\}$

2. 从某工厂生产的 P, Q 两种型号的玻璃种分别随机抽取 8 个样品进行检查，对其硬度系数进行统计，统计数据用茎叶图表示（如图所示），则 P 组数据的众数和 Q 组数据的中位数分别为（ ）

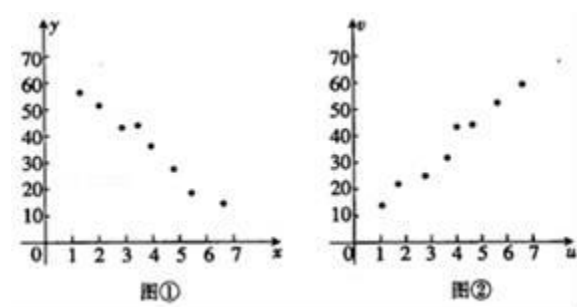
P	Q
4 1 0	1 2 6
2 2 1	2 1 2 3 3
1 0	3 3 4

A. 22 和 22.5 B. 21.5 和 23 C. 22 和 22 D. 21.5 和 22.5

3. 函数 $f(x) = \sqrt{10 - 3x} + \lg(2^x - 4)$ 的定义域是（ ）

A. $(2, \frac{10}{3}]$ B. $[2, \frac{10}{3}]$ C. $(2, +\infty)$ D. $[\frac{10}{3}, +\infty]$

4. 对变量 x, y 有观测数据 (x_i, y_i) ($i=1, 2, 3, \dots, 8$)，得散点图如图①所示，对变量 u, v 有观测数据 (u_i, v_i) ($i=1, 2, 3, \dots, 8$)，得散点图如图②所示，由这两个散点图可以判断（ ）



A. 变量 x 与 y 正相关； u 与 v 正相关

B. 变量 x 与 y 正相关； u 与 v 负相关

C. 变量 x 与 y 负相关； u 与 v 正相关

D. 变量 x 与 y 负相关； u 与 v 负相关

5. 已知 $M = x^2 - 3x + 7$ ， $N = -x^2 + x + 1$ ，则（ ）

A. $M < N$ B. $M > N$

C. $M=N$ D. M, N 的大小与 x 的取值有关

6. 从 1, 2, 3, 4, 5, 6 这 6 个数字中任取三个数字, 其中: ①至少有一个偶数与都是偶数; ②至少有一个偶数与都是奇数; ③至少有一个偶数与至少有一个奇数; ④恰有一个偶数与恰有两个偶数. 上述事件中, 是互斥但不对立的事件是 ()

A. ① B. ② C. ③ D. ④

7. 函数 $f(x) = \lg(-x) + \frac{1}{x}$ 的零点所在区间为 ()

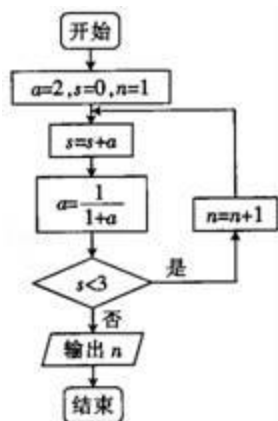
A. $(-\frac{1}{2}, 0)$ B. $(-3, -2)$ C. $(-2, -1)$ D. $(-1, 0)$

8. 若函数 $f(x) = \begin{cases} a(x-1)+1, & x < -1 \\ a^{-x}, & x \geq -1 \end{cases}$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) $\mathbb{R}$ 上的单调函数, 则

实数 a 的取值范围是 ()

A. $(0, \frac{1}{3})$ B. $(\frac{1}{3}, 1)$ C. $(0, \frac{1}{3}]$ D. $[\frac{1}{3}, 1)$

9. 如图所示的程序框图, 运行程序后, 输出的结果等于 ()



A. 6 B. 5 C. 4 D. 3

10. 将 500 个实验样本编号为 001, 002, 003, ..., 500. 采用系统抽样的方法抽取一个容量为 50 的样本, 且随机抽得的一个号码为 005, 这 500 个实验样本分别在三个本库, 从 001 到 100 在甲样本库, 从 101 到 250 放在乙样本库, 从 251 到 500 放在丙样本库, 则甲、乙、丙三个样本库被抽中的样本个数分别为 ()

A. 10, 15, 25 B. 10, 16, 24 C. 11, 15, 24 D. 12, 13, 25

11. 甲乙两位同学进行乒乓球比赛, 甲获胜的概率为 0.4, 现采用随机模拟的方

法估计这两位同学打 3 局比赛甲恰好获胜 2 局的概率：先利用计算器产生 0 到 9 之间取整数值的随机数，制定 1, 2, 3, 4 表示甲获胜，用 5, 6, 7, 8, 9, 0 表示乙获胜，再以每三个随机数为一组，代表 3 局比赛的结果，经随机模拟产生了 30 组随机数

102 231 146 027 590 763 245 207 310 386 350
481 337 286 139
579 684 487 370 175 772 235 246 487 569 047
008 341 287 114

据此估计，这两位同学打 3 局比赛甲恰好获胜 2 局的概率为 ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{3}{10}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{11}{30}$

12. 设 $\min\{p, q, r\}$ 为表示 p, q, r 三者中较小的一个，若函数 $f(x) = \min\{x+1, -2x+7, x^2 - x+1\}$ ，则不等式 $f(x) > 1$ 的解集为 ()

- A. $(0, 2)$ B. $(-\infty, 0)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(1, 3)$

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 如图，面积为 10 的矩形中有一封闭曲线围成的阴影区域，在矩形中随机撒一粒种子，它落在阴影区域内的概率为 $\frac{3}{5}$ ，则阴影区域的面积为_____.



14. 若 $\log \sqrt{3}x + \log \sqrt{3}y = 2$ ，则 $3x+2y$ 的最小值为_____.

15. 已知函数 $f(x) = -x^3$ ($x > 0$)，若 $f(m) - \frac{1}{2}m^2 \leq f(1-m) - \frac{1}{2}(1-m)^2$ ，则 m 的取值范围为_____.

16. 已知样本数据 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 的方差 $s^2 = \frac{1}{5}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 - 80)$ ，则样本数据 $2a_1+1, 2a_2+1, 2a_3+1, 2a_4+1, 2a_5+1$ 的平均数为_____.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分）

17. 已知函数 $f(x) = 2x^2 + (2 - m)x - m$, $g(x) = x^2 - x + 2m$.

(1) 若 $m=1$, 求不等式 $f(x) > 0$ 的解集;

(2) 若 $m > 0$, 求关于 x 的不等式 $f(x) \leq g(x)$ 的解集.

18. 一个生物研究性学习小组, 为了研究平均气温与一天内某豆类胚芽生长之间的关系, 他们分别记录了 4 月 6 日至 4 月 11 日的平均气温 x ($^{\circ}\text{C}$) 与该豆类胚芽一天生长的长度 y (mm), 得到如下数据:

日期	4 月 6 日	4 月 7 日	4 月 8 日	4 月 9 日	4 月 10 日	4 月 11 日
平均气温 x ($^{\circ}\text{C}$)	10	11	13	12	8	6
一天生长的长度 y (mm)	22	25	29	26	16	12

该小组的研究方案是: 先从这六组数据中选取 6 日和 11 日的两组数据作为检验数据, 用剩下的 4 组数据即: 7 日至 10 日的四组数据求出线性回归方程.

(1) 请按研究方案求出 y 关于 x 的线性回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$;

(2) 用 6 日和 11 日的两组数据作为检验数据, 并判断该小组所得线性回归方程是否理想. (若由线性回归方程得到的估计数据与所选的检验数据的误差不超过 1mm, 则认为该方程是理想的)

参考公式:
$$\begin{cases} \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2} \\ \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} \end{cases}$$

19. 已知 $0 < a < 1$, 函数 $f(x) = \log_a x$.

(1) 若 $f(5a - 1) \geq f(2a)$, 求实数 a 的最大值;

(2) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 设 $g(x) = f(x) - 3^x + 2m$, 若函数 $g(x)$ 在 $(1, 2)$ 上有零点, 求实数 m 的取值范围.

20. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2(a - 2)x - b^2 + 13$.

(1) 先后两次抛掷一枚质地均匀的骰子 (骰子六个面上分别标有数字 1, 2, 3, 4, 5, 6), 骰子向上的数字一次记为 a, b , 求方程 $f(x) = 0$ 有两个不等正根的

概率；

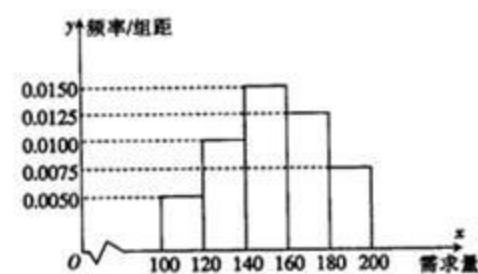
(2) 如果 $a \in [2, 6]$ ，求函数 $f(x)$ 在区间 $[2, 3]$ 上是单调函数的概率.

21. 一名大学生尝试开家小“网店”销售一种学习用品，经测算每售出 1 盒盖产品获利 30 元，未售出的商品每盒亏损 10 元. 根据统计资料，得到该商品的月需求量的频率分布直方图（如图所示），该同学为此购进 180 盒该产品，以 x （单位：盒， $100 \leq x \leq 200$ ）表示一个月内的市场需求量， y （单位：元）表示一个月内经销该产品的利润.

(1) 根据直方图估计这个月内市场需求量 x 的平均数；

(2) 将 y 表示为 x 的函数；

(3) 根据直方图估计这个月利润不少于 3800 元的概率（用频率近似概率）.



22. 已知函数 $f(x) = \frac{-3^x + a}{3^{x+1} + b}$.

(1) 当 $a=b=1$ 时，求满足 $f(x) = 3^x$ 的 x 的值；

(2) 若函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数，

①判断 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 的单调性并用定义法证明；

②当 $x \neq 0$ 时，函数 $g(x)$ 满足 $f(x) \cdot [g(x) + 2] = \frac{1}{3} (3^{-x} - 3^x)$ ，若对任意 $x \in \mathbb{R}$

且 $x \neq 0$ ，不等式 $g(2x) \geq m \cdot g(x) - 11$ 恒成立，求实数 m 的最大值.

2016-2017 学年河北省邢台市高一（上）期末数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分）

1. 已知集合 $M = \{x | \log_3 x \leq 1\}$ ， $N = \{x | x^2 + x - 2 \leq 0\}$ ，则 $M \cap N$ 等于（ ）

A. $\{x | -2 \leq x \leq 1\}$ B. $\{x | 1 \leq x \leq 3\}$ C. $\{x | 0 < x \leq 1\}$ D. $\{x | 0 < x \leq 3\}$

【考点】交集及其运算.

【分析】化简集合 M 、 N ，根据交集的定义写出 $M \cap N$ 即可.

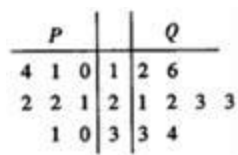
【解答】解：集合 $M = \{x | \log_3 x \leq 1\} = \{x | 0 < x \leq 3\}$ ，

$N = \{x | x^2 + x - 2 \leq 0\} = \{x | -2 \leq x \leq 1\}$ ，

则 $M \cap N = \{x | 0 < x \leq 1\}$.

故选：C.

2. 从某工厂生产的 P 、 Q 两种型号的玻璃种分别随机抽取 8 个样品进行检查，对其硬度系数进行统计，统计数据用茎叶图表示（如图所示），则 P 组数据的众数和 Q 组数据的中位数分别为（ ）



A. 22 和 22.5 B. 21.5 和 23 C. 22 和 22 D. 21.5 和 22.5

【考点】茎叶图.

【分析】利用茎叶图的性质、众数、中位数的定义求解.

【解答】解：由茎叶图知：

P 组数据的众数为 22，

Q 组数据的中位数为： $\frac{22+23}{2} = 22.5$.

故选：A.

3. 函数 $f(x) = \sqrt{10-3x} + \lg(2^x - 4)$ 的定义域是 ()

- A. $(2, \frac{10}{3}]$ B. $[2, \frac{10}{3}]$ C. $(2, +\infty)$ D. $[\frac{10}{3}, +\infty]$

【考点】函数的定义域及其求法.

【分析】由 $10 - 3x \geq 0$, $2^x - 4 > 0$, 解不等式即可得到所求定义域.

【解答】解: 由 $10 - 3x \geq 0$, $2^x - 4 > 0$,

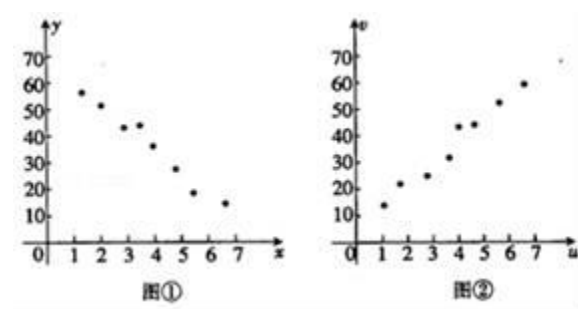
可得 $x \leq \frac{10}{3}$, 且 $x > 2$,

即为 $2 < x \leq \frac{10}{3}$,

则定义域为 $(2, \frac{10}{3}]$.

故选: A.

4. 对变量 x, y 有观测数据 (x_i, y_i) ($i=1, 2, 3, \dots, 8$), 得散点图如图①所示, 对变量 u, v 有观测数据 (u_i, v_i) ($i=1, 2, 3, \dots, 8$), 得散点图如图②所示, 由这两个散点图可以判断 ()



- A. 变量 x 与 y 正相关; u 与 v 正相关
B. 变量 x 与 y 正相关; u 与 v 负相关
C. 变量 x 与 y 负相关; u 与 v 正相关
D. 变量 x 与 y 负相关; u 与 v 负相关

【考点】线性回归方程.

【分析】通过观察散点图可以知道, y 随 x 的增大而减小, 各点整体呈下降趋势, x 与 y 负相关, u 随 v 的增大而增大, 各点整体呈上升趋势, u 与 v 正相关.

【解答】解: 由题图 1 可知, y 随 x 的增大而减小, 各点整体呈下降趋势, x 与 y 负相关,

由题图 2 可知, u 随 v 的增大而增大, 各点整体呈上升趋势, u 与 v 正相关.
故选: C.

5. 已知 $M=x^2-3x+7$, $N=-x^2+x+1$, 则 ()

A. $M < N$ B. $M > N$

C. $M = N$ D. M, N 的大小与 x 的取值有关

【考点】不等式比较大小.

【分析】通过作差求出 $M - N > 0$, 从而比较出其大小即可.

【解答】解: $\because M - N = x^2 - 3x + 7 + x^2 - x - 1 = 2(x^2 - 2x + 3) = 2(x - 1)^2 + 4 > 0$,

故 $M > N$,

故选: B.

6. 从 1, 2, 3, 4, 5, 6 这 6 个数字中任取三个数字, 其中: ①至少有一个偶数与都是偶数; ②至少有一个偶数与都是奇数; ③至少有一个偶数与至少有一个奇数; ④恰有一个偶数与恰有两个偶数. 上述事件中, 是互斥但不对立的事件是 ()

A. ① B. ② C. ③ D. ④

【考点】互斥事件与对立事件.

【分析】利用互斥事件、对立事件的定义直接求解.

【解答】解: 从 1, 2, 3, 4, 5, 6 这 6 个数字中任取三个数字,

在①中, 至少有一个偶数与都是偶数能同时发生, 不是互斥事件, 故①不成立;

在②中, 至少有一个偶数与都是奇数是对立事件, 故②不成立;

在③中, 至少有一个偶数与至少有一个奇数能同时发生, 不是互斥事件, 故③不成立;

在④中, 恰有一个偶数与恰有两个偶数不能同时发生, 但能同时不发生, 是互斥但不对立的事件, 故④成立.

故选: D.

7. 函数 $f(x) = \lg(-x) + \frac{1}{x}$ 的零点所在区间为 ()

- A. $(-\frac{1}{2}, 0)$ B. $(-3, -2)$ C. $(-2, -1)$ D. $(-1, 0)$

【考点】二分法的定义.

【分析】由函数零点的存在性定理, 结合答案直接代入计算取两端点函数值异号的即可.

【解答】解: $f(-3) = \lg 3 - \frac{1}{3} > 0$, $f(-2) = \lg 2 - \frac{1}{2} < 0$,

$$\therefore f(-3)f(-2) < 0$$

由函数零点的存在性定理, 函数 $f(x)$ 的零点所在的区间为 $(-3, -2)$

故选: B

8. 若函数 $f(x) = \begin{cases} a(x-1)+1, & x < -1 \\ a^{-x}, & x \geq -1 \end{cases}$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) $\mathbb{R}$ 上的单调函数, 则

实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(0, \frac{1}{3})$ B. $(\frac{1}{3}, 1)$ C. $(0, \frac{1}{3}]$ D. $[\frac{1}{3}, 1)$

【考点】函数单调性的性质.

【分析】根据分段函数单调性的关系进行求解即可.

【解答】解: $\because a > 0$, $\therefore$ 当 $x < -1$ 时, 函数 $f(x)$ 为增函数,

$\because$ 函数在 $\mathbb{R}$ 上的单调函数,

$\therefore$ 若函数为单调递增函数,

则当 $x \geq -1$ 时, $f(x) = (\frac{1}{a})^x$, 为增函数,

则 $\frac{1}{a} > 1$, 即 $0 < a < 1$,

同时 $a > -2a+1$,

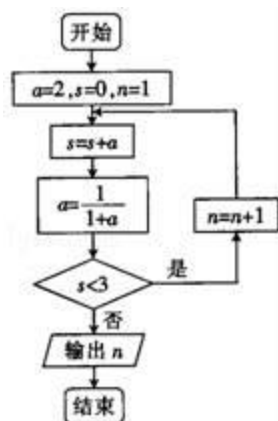
即 $3a > 1$,

即 $a > \frac{1}{3}$,

综上 $\frac{1}{3} < a < 1$,

故选: B.

9. 如图所示的程序框图，运行程序后，输出的结果等于（ ）



A. 6 B. 5 C. 4 D. 3

【考点】程序框图.

【分析】列出循环过程中 s 与 a , n 的数值，不满足判断框的条件即可结束循环.

【解答】解：第 1 步： $s=2$, $a=\frac{1}{3}$,

第 2 步： $n=2$, $s=\frac{7}{3}$, $a=\frac{3}{4}$,

第 3 步： $n=3$, $s=\frac{37}{12}>3$,

结束循环，输出 $n=3$,

故选：D.

10. 将 500 个实验样本编号为 001, 002, 003, ..., 500. 采用系统抽样的方法抽取一个容量为 50 的样本，且随机抽得的一个号码为 005，这 500 个实验样本分别在三个本库，从 001 到 100 在甲样本库，从 101 到 250 放在乙样本库，从 251 到 500 放在丙样本库，则甲、乙、丙三个样本库被抽中的样本个数分别为（ ）

A. 10, 15, 25 B. 10, 16, 24 C. 11, 15, 24 D. 12, 13, 25

【考点】系统抽样方法.

【分析】依题意可知，在随机抽样中，首次抽到 005 号，以后每隔 10 个号抽到一个人，构成以 5 为首项，10 为公差的等差数列，从而得出甲、乙、丙三个样本库被抽中的样本个数.

【解答】解：依题意可知，在随机抽样中，首次抽到 005 号，以后每隔 10 个号抽到一个人，构成以 5 为首项，10 为公差的等差数列，故可分别求出在 001 到 100 中有 10 人，在 101 到 250 号中共有 15 人，251 到 500 号中共有 25 人。

故选：A.

11. 甲乙两位同学进行乒乓球比赛，甲获胜的概率为 0.4，现采用随机模拟的方法估计这两位同学打 3 局比赛甲恰好获胜 2 局的概率：先利用计算器产生 0 到 9 之间取整数值的随机数，制定 1, 2, 3, 4 表示甲获胜，用 5, 6, 7, 8, 9, 0 表示乙获胜，再以每三个随机数为一组，代表 3 局比赛的结果，经随机模拟产生了 30 组随机数

102 231 146 027 590 763 245 207 310 386 350
481 337 286 139
579 684 487 370 175 772 235 246 487 569 047
008 341 287 114

据此估计，这两位同学打 3 局比赛甲恰好获胜 2 局的概率为（ ）

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{3}{10}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{11}{30}$

【考点】模拟方法估计概率.

【分析】由题意知模拟打 3 局比赛甲恰好获胜 2 局的结果，经随机模拟产生了如下 30 组随机数，在 30 组随机数中表示打 3 局比赛甲恰好获胜 2 局的有可以通过列举得到共 9 组随机数，根据概率公式，得到结果.

【解答】解：由题意知模拟打 3 局比赛甲恰好获胜 2 局的结果，经随机模拟产生了如下 20 组随机数，

在 30 组随机数中表示打 3 局比赛甲恰好获胜 2 局的有：102, 146, 245, 310, 481, 337, 139, 235, 246, 共 9 组随机数，

$\therefore$ 所求概率为 $\frac{9}{30} = \frac{3}{10}$.

故选 B.

12. 设 $\min\{p, q, r\}$ 为表示 p, q, r 三者中较小的一个, 若函数 $f(x) = \min\{x+1, -2x+7, x^2-x+1\}$, 则不等式 $f(x) > 1$ 的解集为 ()

A. $(0, 2)$ B. $(-\infty, 0)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(1, 3)$

【考点】函数的图象.

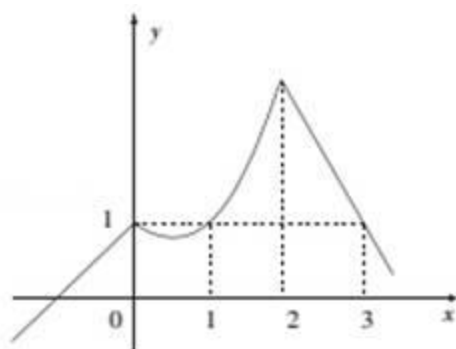
【分析】由题意得 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ x^2-x+1, & 0 \leq x \leq 2 \\ -2x+7, & x > 2 \end{cases}$, 作出函数 $f(x)$ 的图象如图所

示, 根据图象可得答案.

【解答】解: 由题意得 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ x^2-x+1, & 0 \leq x \leq 2 \\ -2x+7, & x > 2 \end{cases}$, 作出函数 $f(x)$ 的图象如

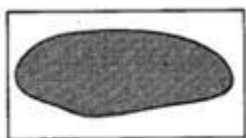
图所示, 则 $f(x) > 1$ 的解集为 $(1, 3)$.

故选: D.



二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 如图, 面积为 10 的矩形中有一封闭曲线围成的阴影区域, 在矩形中随机撒一粒种子, 它落在阴影区域内的概率为 $\frac{3}{5}$, 则阴影区域的面积为 6.



【考点】模拟方法估计概率.

【分析】本题考查的知识点是根据几何概型的意义进行模拟试验, 计算不规则图形的面积, 关键是要根据几何概型的计算公式, 列出豆子落在阴影区域内的概率

与阴影部分面积及矩形面积之间的关系.

【解答】解：由题意， $\frac{S_{\text{阴影}}}{S_{\text{矩形}}} = \frac{3}{5}$,

$$\therefore S_{\text{阴影}} = 10 \times \frac{3}{5} = 6,$$

故答案为 6.

14. 若 $\log \sqrt{3}x + \log \sqrt{3}y = 2$, 则 $3x+2y$ 的最小值为 $6\sqrt{2}$.

【考点】对数的运算性质.

【分析】由 $\log \sqrt{3}x + \log \sqrt{3}y = 2$, 可得 $x, y > 0$, $xy = 3$. 对 $3x+2y$ 利用基本不等式的性质即可得出.

【解答】解： $\because \log \sqrt{3}x + \log \sqrt{3}y = 2$, $\therefore x, y > 0$, $xy = 3$.

则 $3x+2y \geq 2\sqrt{3x \cdot 2y} = 2\sqrt{6 \times 3} = 6\sqrt{2}$, 当且仅当 $y = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $x = \sqrt{2}$ 时取等号.

故答案为： $6\sqrt{2}$.

15. 已知函数 $f(x) = -x^3$ ($x > 0$), 若 $f(m) - \frac{1}{2}m^2 \leq f(1-m) - \frac{1}{2}(1-m)^2$, 则 m 的取值范围为 $[\frac{1}{2}, 1)$.

【考点】其他不等式的解法.

【分析】令 $F(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2 = -x^3 - \frac{1}{2}x^2$ ($x > 0$), 得到 $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 递减, 根据函数的单调性求出 m 的范围即可.

【解答】解：由于 $f(m) - \frac{1}{2}m^2 \leq f(1-m) - \frac{1}{2}(1-m)^2$,

令 $F(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2 = -x^3 - \frac{1}{2}x^2$ ($x > 0$),

则 $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 递减,

不等式 $F(m) \leq F(1-m)$.

$$\text{故} \begin{cases} m \geq 1-m \\ m > 0 \\ 1-m > 0 \end{cases}, \text{解得:} \begin{cases} m \geq \frac{1}{2} \\ m > 0 \\ m < 1 \end{cases},$$

$$\text{即} \frac{1}{2} \leq m < 1,$$

故答案为: $[\frac{1}{2}, 1)$.

16. 已知样本数据 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 的方差 $s^2 = \frac{1}{5} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 - 80)$, 则样本数据 $2a_1+1, 2a_2+1, 2a_3+1, 2a_4+1, 2a_5+1$ 的平均数为 9.

【考点】众数、中位数、平均数.

【分析】设样本数据 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 的平均数为 a , 推导出 $5a^2=80$, 解得 $a=4$, 由此能求出 $2a_1+1, 2a_2+1, 2a_3+1, 2a_4+1, 2a_5+1$ 的平均数.

【解答】解: 设样本数据 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 的平均数为 a ,

$$\because \text{样本数据 } a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \text{ 的方差 } s^2 = \frac{1}{5} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 - 80),$$

$$\therefore S^2 = \frac{1}{5} [(a_1 - a)^2 + (a_2 - a)^2 + (a_3 - a)^2 + (a_4 - a)^2 + (a_5 - a)^2]$$

$$= \frac{1}{5} [a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 - 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)a + 5a^2]$$

$$= \frac{1}{5} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 - 5a^2)$$

$$= \frac{1}{5} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 - 80),$$

$$\therefore 5a^2=80, \text{解得 } a=4,$$

$$\therefore 2a_1+1, 2a_2+1, 2a_3+1, 2a_4+1, 2a_5+1 \text{ 的平均数为 } 2a+1=9.$$

故答案为: 9.

三、解答题 (本大题共 6 小题, 共 70 分)

17. 已知函数 $f(x) = 2x^2 + (2-m)x - m$, $g(x) = x^2 - x + 2m$.

(1) 若 $m=1$, 求不等式 $f(x) > 0$ 的解集;

(2) 若 $m > 0$, 求关于 x 的不等式 $f(x) \leq g(x)$ 的解集.

【考点】一元二次不等式的解法.

【分析】(1) $m=1$ 时求出对应不等式 $f(x) > 0$ 的解集即可；

(2) $m > 0$ 时，求出不等式 $f(x) \leq g(x)$ 的解集即可．

【解答】解：(1) 函数 $f(x) = 2x^2 + (2 - m)x - m$ ，

当 $m=1$ 时， $2x^2 + x - 1 > 0$ ，

解得 $x > \frac{1}{2}$ 或 $x < -1$ ，

$\therefore$ 不等式 $f(x) > 0$ 的解集是 $\{x | x > \frac{1}{2} \text{ 或 } x < -1\}$ ；

(2) 函数 $f(x) = 2x^2 + (2 - m)x - m$ ， $g(x) = x^2 - x + 2m$ ；

不等式 $f(x) \leq g(x)$ 是 $2x^2 + (2 - m)x - m \leq x^2 - x + 2m$ ，

化简得 $x^2 + (3 - m)x - 3m \leq 0$ ，

解得 $(x+3)(x-m) \leq 0$ ；

$\because m > 0$ ， $\therefore -3 \leq x \leq m$ ，

$\therefore$ 不等式 $f(x) \leq g(x)$ 的解集是 $\{x | -3 \leq x \leq m\}$ ．

18. 一个生物研究性学习小组，为了研究平均气温与一天内某豆类胚芽生长之间的关系，他们分别记录了 4 月 6 日至 4 月 11 日的平均气温 x ($^{\circ}\text{C}$) 与该豆类胚芽一天生长的长度 y (mm)，得到如下数据：

日期	4 月 6 日	4 月 7 日	4 月 8 日	4 月 9 日	4 月 10 日	4 月 11 日
平均气温 x ($^{\circ}\text{C}$)	10	11	13	12	8	6
一天生长的长度 y (mm)	22	25	29	26	16	12

该小组的研究方案是：先从这六组数据中选取 6 日和 11 日的两组数据作为检验数据，用剩下的 4 组数据即：7 日至 10 日的四组数据求出线性回归方程．

(1) 请按研究方案求出 y 关于 x 的线性回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ ；

(2) 用 6 日和 11 日的两组数据作为检验数据，并判断该小组所得线性回归方程是否理想．(若由线性回归方程得到的估计数据与所选的检验数据的误差不超过 1mm，则认为该方程是理想的)

$$\text{参考公式: } \begin{cases} \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2} \\ \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} \end{cases}$$

【考点】线性回归方程.

【分析】(1) 求出 $\bar{x}$, $\bar{y}$, 由公式, 得 $\hat{b}$ 的值, 从而求出 $\hat{a}$ 的值, 从而得到 y 关于 x 的线性回归方程,

(2) 由 (1) 能求出该小组所得线性回归方程是理想的.

【解答】解: (1) $\because \bar{x}=11, \bar{y}=24,$

$$\therefore \hat{b} = \frac{18}{7},$$

$$\text{故 } \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = -\frac{30}{7},$$

$$\text{故 } y \text{ 关于 } x \text{ 的方程是: } \hat{y} = \frac{18}{7}x - \frac{30}{7};$$

$$(2) \because x=10 \text{ 时, } \hat{y} = \frac{150}{7},$$

$$\text{误差是 } \left| \frac{150}{7} - 22 \right| = \frac{4}{7} < 1,$$

$$x=6 \text{ 时, } \hat{y} = \frac{78}{7}, \text{ 误差是 } \left| \frac{78}{7} - 12 \right| = \frac{6}{7} < 1,$$

故该小组所得线性回归方程是理想的.

19. 已知 $0 < a < 1$, 函数 $f(x) = \log_a x$.

(1) 若 $f(5a-1) \geq f(2a)$, 求实数 a 的最大值;

(2) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 设 $g(x) = f(x) - 3^{x+2}m$, 若函数 $g(x)$ 在 $(1, 2)$ 上有零点, 求实数 m 的取值范围.

【考点】对数函数的图象与性质.

【分析】(1) 根据对数函数的性质得到关于 a 的不等式组, 解出即可;

(2) 根据 $g(x)$ 的单调性得到关于 m 的不等式组, 解出即可.

【解答】解: (1) $\because 0 < a < 1,$

$$\therefore 0 < 5a - 1 \leq 2a,$$

$$\therefore \frac{1}{5} < a \leq \frac{1}{3},$$

$\therefore a$ 的最大值是 $\frac{1}{3}$;

(2) $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 递减,

$\because g(x)$ 在 $(1, 2)$ 上有零点,

$$\therefore \begin{cases} g(1) = -3 + 2m > 0 \\ g(2) = -1 - 9 + 2m < 0 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \frac{3}{2} < m < 5,$$

故 m 的范围是 $(\frac{3}{2}, 5)$.

20. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2(a-2)x - b^2 + 13$.

(1) 先后两次抛掷一枚质地均匀的骰子 (骰子六个面上分别标有数字 1, 2, 3, 4, 5, 6), 骰子向上的数字一次记为 a, b , 求方程 $f(x) = 0$ 有两个不等正根的概率;

(2) 如果 $a \in [2, 6]$, 求函数 $f(x)$ 在区间 $[2, 3]$ 上是单调函数的概率.

【考点】 列举法计算基本事件数及事件发生的概率.

【分析】 (1) 基本事件总数 $n = 6 \times 6 = 36$, 设事件 A 表示“ $f(x) = x^2 - 2(a-2)x - b^2 + 13 = 0$ 有两个不等正根”, 利用列举法求出满足事件 A 的基本事件个数, 由此能求出方程 $f(x) = 0$ 有两个不等正根的概率.

(2) 设事件 B 表示“函数 $f(x)$ 在区间 $[2, 3]$ 上是单调函数”, $a \in [2, 6]$, $f(x) = x^2 - 2(a-2)x - b^2 + 13$ 的对称轴为 $x = a - 2 \in [0, 4]$, $f(x)$ 在区间 $[2, 3]$ 上为增函数时, 只要对称轴不在 $[2, 3]$ 上即可, 根据几何概型定义得函数 $f(x)$ 在区间 $[2, 3]$ 上是单调函数的概率.

【解答】 解: (1) 如果先后抛掷的一枚均匀的骰子所得的向上的点数记为 (a, b) , 则基本事件总数 $n = 6 \times 6 = 36$,

设事件 A 表示“ $f(x) = x^2 - 2(a-2)x - b^2 + 13 = 0$ 有两个不等正根”,

$$\text{则事件 } A \text{ 满足: } \begin{cases} a-2 > 0 \\ 13-b^2 > 0 \\ (a-2)^2 + b^2 - 13 > 0 \end{cases},$$

满足事件 A 的基本事件有：(5, 3), (6, 1), (6, 2), (6, 3), 共有 $m=4$ 个，

$\therefore$ 方程 $f(x)=0$ 有两个不等正根的概率 $p(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

(2) 设事件 B 表示“函数 $f(x)$ 在区间 $[2, 3]$ 上是单调函数”，

$\because a \in [2, 6]$, $f(x) = x^2 - 2(a-2)x - b^2 + 13$ 的对称轴为 $x = a - 2 \in [0, 4]$,
区间长为 4,

$f(x)$ 在区间 $[2, 3]$ 上为增函数时，只要对称轴不在 $[2, 3]$ 上即可，

$\therefore$ 对称轴不在 $[2, 3]$ 的区间长为 3,

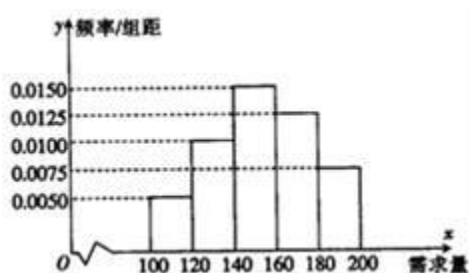
根据几何概型定义得函数 $f(x)$ 在区间 $[2, 3]$ 上是单调函数的概率 $P(B) = \frac{3}{4}$.

21. 一名大学生尝试开家小“网店”销售一种学习用品，经测算每售出 1 盒盖产品获利 30 元，未售出的商品每盒亏损 10 元. 根据统计资料，得到该商品的月需求量的频率分布直方图（如图所示），该同学为此购进 180 盒该产品，以 x （单位：盒， $100 \leq x \leq 200$ ）表示一个月内的市场需求量， y （单位：元）表示一个月内经销该产品的利润.

(1) 根据直方图估计这个月内市场需求量 x 的平均数；

(2) 将 y 表示为 x 的函数；

(3) 根据直方图估计这个月利润不少于 3800 元的概率（用频率近似概率）.



【考点】 列举法计算基本事件数及事件发生的概率；频率分布直方图.

【分析】 (1) 根据直方图能估计这个月内市场需求量 x 的平均数.

(2) 由每售出 1 盒盖产品获利 30 元，未售出的商品每盒亏损 10 元，分 $100 \leq x \leq 180$, $180 < x \leq 200$ 两种情况进行分类讨论，能将 y 表示为 x 的函数.

(3) 由利润不少于 3800 元，得到 $x \geq 140$ ，由此能求出利润不少于 3800 元的概率.

【解答】解：（1）由频率分布直方图得：

需求量在 $[100, 120)$ 内的频率为： $0.005 \times 20 = 0.1$ ，

需求量在 $[120, 140)$ 内的频率为： $0.01 \times 20 = 0.2$ ，

需求量在 $[140, 160)$ 内的频率为： $0.015 \times 20 = 0.3$ ，

需求量在 $[160, 180)$ 内的频率为： $0.0125 \times 20 = 0.25$ ，

需求量在 $[180, 200]$ 内的频率为： $0.0075 \times 20 = 0.15$ ，

∴根据直方图估计这个月内市场需求量 x 的平均数：

$$\bar{x} = 110 \times 0.1 + 130 \times 0.2 + 150 \times 0.3 + 170 \times 0.25 + 190 \times 0.15 = 153.$$

（2）∵每售出 1 盒盖产品获利 30 元，未售出的商品每盒亏损 10 元，

∴当 $100 \leq x \leq 180$ 时， $y = 30x - 10 = 40x - 1800$ ，

当 $180 < x \leq 200$ 时， $y = 30 \times 180 = 5400$ ，

$$\therefore y = \begin{cases} 40x - 1800, & 100 \leq x \leq 180, x \in \mathbb{Z} \\ 5400, & 180 < x \leq 200, x \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

（3）∵利润不少于 3800 元，

∴ $40x - 1800 \geq 3800$ ， $\therefore x \geq 140$ ，

∴由（1）知利润不少于 3800 元的概率为：

$$1 - 0.1 - 0.2 = 0.7.$$

22. 已知函数 $f(x) = \frac{-3^x + a}{3^{x+1} + b}$.

（1）当 $a=b=1$ 时，求满足 $f(x) = 3^x$ 的 x 的值；

（2）若函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数，

①判断 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 的单调性并用定义法证明；

②当 $x \neq 0$ 时，函数 $g(x)$ 满足 $f(x) \cdot [g(x) + 2] = \frac{1}{3} (3^{-x} - 3^x)$ ，若对任意 $x \in \mathbb{R}$ 且 $x \neq 0$ ，不等式 $g(2x) \geq m \cdot g(x) - 11$ 恒成立，求实数 m 的最大值.

【考点】函数恒成立问题；函数单调性的判断与证明；函数奇偶性的判断.

【分析】（1）当 $a=b=1$ 时， $f(x) = \frac{-3^x + 1}{3^{x+1} + 1}$. 由 $f(x) = 3^x$ ，可得满足条件的 x

的值;

(2) 若函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数, 则 $\begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases}$,

① $f(x)$ 在 R 上单调递减, 利用定义法, 可证明结论;

② 不等式 $g(2x) \geq m \cdot g(x) - 11$ 恒成立, 即 $(3^x + 3^{-x})^2 - 2 \geq m \cdot (3^x + 3^{-x}) - 11$ 恒成立, 即 $m \leq (3^x + 3^{-x}) + \frac{9}{3^x + 3^{-x}}$ 恒成立, 结合对勾函数的图象和性质, 可得答案.

【解答】 解: (1) 当 $a=b=1$ 时, $f(x) = \frac{-3^x + 1}{3^{x+1} + 1}$.

若 $f(x) = 3^x$, 即 $3(3^x)^2 + 2 \cdot 3^x - 1 = 0$,

解得: $3^x = \frac{1}{3}$, 或 $3^x = -1$ (舍去),

$\therefore x = -1$;

(2) 若函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数,

则 $f(-x) = -f(x)$, 即 $\frac{-3^{-x} + a}{3^{-x+1} + b} = -\frac{-3^x + a}{3^{x+1} + b}$,

即 $(3a - b)(3^x + 3^{-x}) + 2ab - 6 = 0$,

解得: $\begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases}$, 或 $\begin{cases} a=-1 \\ b=-3 \end{cases}$,

经检验, $\begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases}$ 满足函数的定义域为 R ,

$\therefore f(x) = \frac{-3^x + 1}{3^{x+1} + 3} = \frac{1}{3}(-1 + \frac{2}{3^{x+1}})$.

① $f(x)$ 在 R 上单调递减, 理由如下:

$\therefore$ 任取 $x_1 < x_2$,

则 $3^{x_1+1} > 0$, $3^{x_2+1} > 0$, $3^{x_2} - 3^{x_1} > 0$

则 $f(x_1) - f(x_2) = \frac{1}{3}(-1 + \frac{2}{3^{x_1+1}}) - \frac{1}{3}(-1 + \frac{2}{3^{x_2+1}}) = \frac{2(3^{x_2} - 3^{x_1})}{3(3^{x_1+1})(3^{x_2+1})} > 0$,

即 $f(x_1) > f(x_2)$

$\therefore f(x)$ 在 R 上是减函数;

②∵当 $x \neq 0$ 时, 函数 $g(x)$ 满足 $f(x) \cdot [g(x) + 2] = \frac{1}{3} (3^{-x} - 3^x)$,

$$\therefore g(x) = 3^x + 3^{-x}, (x \neq 0),$$

$$\text{则 } g(2x) = 3^{2x} + 3^{-2x} = (3^x + 3^{-x})^2 - 2,$$

不等式 $g(2x) \geq m \cdot g(x) - 11$ 恒成立,

$$\text{即 } (3^x + 3^{-x})^2 - 2 \geq m \cdot (3^x + 3^{-x}) - 11 \text{ 恒成立,}$$

$$\text{即 } m \leq (3^x + 3^{-x}) + \frac{9}{3^x + 3^{-x}} \text{ 恒成立,}$$

$$\text{仅 } t = 3^x + 3^{-x}, \text{ 则 } t > 2,$$

$$\text{即 } m \leq t + \frac{9}{t}, t > 2 \text{ 恒成立,}$$

由对勾函数的图象和性质可得: 当 $t=3$ 时, $t + \frac{9}{t}$ 取最小值 6,

$$\text{故 } m \leq 6,$$

即实数 m 的最大值为 6.