

2017-2018 高一（上）期中数学试卷

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的．

1. 已知集合 $A = \{1, 3, 6\}$, $B = \{2, 3, 5\}$, 则 $A \cap B$ 等于 ()
A. $\{3\}$ B. $\{1, 3, 4, 5, 6\}$ C. $\{2, 5\}$ D. $\{1, 6\}$
2. 设 $f(x) = 3^x + 3x - 8$, 用二分法求方程 $3^x + 3x - 8 = 0$ 在 $x \in (1, 2)$ 内近似解的过程中得 $f(1) < 0$, $f(1.5) > 0$, $f(1.25) < 0$, 则方程的根落在区间 ()
A. $(1, 1.25)$ B. $(1.25, 1.5)$ C. $(1.5, 2)$ D. 不能确定
3. 已知 $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x-5, & x \geq 6 \\ f(x+2), & x < 6 \end{cases}$, 则 $f(\frac{1}{4})$ 等于 ()
A. $\frac{3}{4}$ B. 1 C. $\frac{5}{4}$ D. $\frac{3}{2}$
4. 函数 $f(x) = \frac{2x}{\log_2 x}$ 的定义域为 ()
A. $(0, +\infty)$ B. $(1, +\infty)$ C. $(0, 1)$ D. $(0, 1) \cup (1, +\infty)$
5. 下列函数中与函数 $y=x$ 相等的函数是 ()
A. $y = (\sqrt{x})^2$ B. $y = \log_3 3^x$ C. $y = 2^{\log_2 x}$ D. $y = \sqrt{x^2}$
6. 幂函数的图象过点 $(2, \frac{1}{16})$, 则它的单调递增区间是 ()
A. $(-\infty, 2)$ B. $(0, +\infty)$ C. $(-\infty, 0)$ D. $(-\infty, +\infty)$
7. 某厂印刷某图书总成本 y (元)与图书日印量 x (本)的函数解析式为 $y = 5x + 4000$, 而图书出厂价格为每本 10 元, 则该厂为了不亏本, 日印图书至少为 ()
A. 200 本 B. 400 本 C. 600 本 D. 800 本
8. 已知 $a = \log_{0.7} 0.6$, $b = \ln 0.6$, $c = 0.7^{0.6}$, 则 ()
A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $c > a > b$ D. $c > b > a$
9. 已知偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 则满足 $f(2x-1) < f(1)$ 的 x 取值范围是 ()
A. $(-1, 0)$ B. $(0, 1)$ C. $(1, 2)$ D. $(-1, 1)$
10. 已知方程 $|2^x - 1| = a$ 有两个不等实根, 则实数 a 的取值范围是 ()

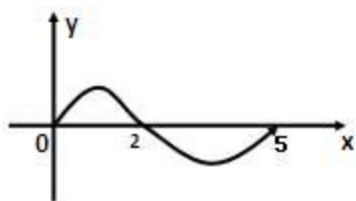
A. $(-\infty, 0)$ B. $(1, 2)$ C. $(0, +\infty)$ D. $(0, 1)$

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）.

11. $27^{\frac{1}{3}} - (3^{0.5})^2 + 8^{-\frac{2}{3}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

12. 函数 $f(x) = a^{2x+1} + 2$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 图象恒过的定点坐标为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

13. 设偶函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-5, 5]$. 当 $x \in [0, 5]$ 时, $f(x)$ 的图象如图, 则不等式 $f(x) > 0$ 的解集为 $\underline{\hspace{2cm}}.$



14. 函数 $f(x) = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 在区间 $[1, 2]$ 上的最大值为 4, 最小值为 m , 则 $m = \underline{\hspace{2cm}}.$

15. 定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 当 $x < 0$ 时, $f(x) = 2x^2 - x$, 则当 $x > 0$ 时, $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$

16. 已知函数 $f(x) = \log_a x + x - b$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$), 当 $3 < a < 4 < b < 5$ 时, 函数 $f(x)$ 的零点 $x_0 \in (n, n+1)$, $n \in \mathbb{N}^*$, 则 $n = \underline{\hspace{2cm}}.$

三、解答题：共 56 分.

17. 已知集合 $A = \{x | a - 1 < x < 2a + 1\}$, $B = \{x | 0 < x < 5\}$.

(1) 当 $a = 0$ 时, 求 $A \cap B$;

(2) 若 $A \subseteq B$, 求实数 a 的取值范围.

18. 已知二次函数 $f(x) = 2kx^2 - 2x - 3k - 2$, $x \in [-5, 5]$.

(1) 当 $k = 1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的最大值和最小值;

(2) 求实数 k 的取值范围, 使 $y = f(x)$ 在区间 $[-5, 5]$ 上是单调函数.

19. 已知函数 $f(x) = \lg\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x - 2^x\right]$.

(1) 求 $f(x)$ 的定义域;

(2) 判断函数 $f(x)$ 在定义域上的单调性并给出证明.

20. 已知函数 $f(x) = \frac{(x+2)(x+k)}{x^2}$ 为偶函数.

(1) 求实数 k 的值；

(2) 记集合 $E = \{y \mid y = f(x), x \in \{-2, 1, 2\}\}$, $\lambda = \lg^2 2 + \lg 2 \cdot \lg 5 + \lg 5 - 4$, 判断 λ 与集合 E 的关系；

(3) 当 $x \in [\frac{1}{m}, \frac{1}{n}]$ ($m > 0, n > 0$) 时, 若函数 $f(x)$ 的值域为 $[2 - 5m, 2 - 5n]$, 求实数 m, n 的值.

2017-2018 高一（上）期中数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的．

1. 已知集合 $A=\{1, 3, 6\}$, $B=\{2, 3, 5\}$, 则 $A \cap B$ 等于 ()

A. $\{3\}$ B. $\{1, 3, 4, 5, 6\}$ C. $\{2, 5\}$ D. $\{1, 6\}$

【考点】1E: 交集及其运算.

【分析】由 A 与 B, 求出两集合的交集即可.

【解答】解: $\because$ 集合 $A=\{1, 3, 6\}$, $B=\{2, 3, 5\}$,

$\therefore A \cap B = \{3\}$,

故选: A.

2. 设 $f(x) = 3^x + 3x - 8$, 用二分法求方程 $3^x + 3x - 8 = 0$ 在 $x \in (1, 2)$ 内近似解的过程中得 $f(1) < 0$, $f(1.5) > 0$, $f(1.25) < 0$, 则方程的根落在区间 ()

A. $(1, 1.25)$ B. $(1.25, 1.5)$ C. $(1.5, 2)$ D. 不能确定

【考点】56: 二分法求方程的近似解.

【分析】由已知“方程 $3^x + 3x - 8 = 0$ 在 $x \in (1, 2)$ 内近似解”, 且具体的函数值的符号也已确定, 由 $f(1.5) > 0$, $f(1.25) < 0$, 它们异号.

【解答】解析: $\because f(1.5) \cdot f(1.25) < 0$,

由零点存在定理, 得,

$\therefore$ 方程的根落在区间 $(1.25, 1.5)$.

故选 B.

3. 已知 $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x-5, & x \geq 6 \\ f(x+2), & x < 6 \end{cases}$, 则 $f(\frac{1}{4})$ 等于 ()

A. $\frac{3}{4}$ B. 1 C. $\frac{5}{4}$ D. $\frac{3}{2}$

【考点】3T: 函数的值.

【分析】推导出 $f\left(\frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{9}{4}\right) = f\left(\frac{17}{4}\right) = f\left(\frac{25}{4}\right)$ ，由此能求出结果.

【解答】解：∵ $x \in \mathbb{R}$ ， $f(x) = \begin{cases} x-5, & x \geq 6 \\ f(x+2), & x < 6 \end{cases}$,

$$\therefore f\left(\frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{9}{4}\right) = f\left(\frac{17}{4}\right) = f\left(\frac{25}{4}\right) = \frac{25}{4} - 5 = \frac{5}{4}.$$

故选：C.

4. 函数 $f(x) = \frac{2x}{\log_2 x}$ 的定义域为 ()

A. $(0, +\infty)$ B. $(1, +\infty)$ C. $(0, 1)$ D. $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

【考点】33：函数的定义域及其求法.

【分析】由分式的分母不为 0 求解 x 的范围得答案.

【解答】解：由 $\log_2 x \neq 0$ ，得 $x > 0$ 且 $x \neq 1$.

$$\therefore \text{函数 } f(x) = \frac{2x}{\log_2 x} \text{ 的定义域为 } (0, 1) \cup (1, +\infty).$$

故选：D.

5. 下列函数中与函数 $y=x$ 相等的函数是 ()

A. $y = (\sqrt{x})^2$ B. $y = \log_3 3^x$ C. $y = 2^{\log_2 x}$ D. $y = \sqrt{x^2}$

【考点】32：判断两个函数是否为同一函数.

【分析】根据两个函数的定义域相同，对应关系也相同，即可判断它们是同一函数.

【解答】解：对于 A， $y = (\sqrt{x})^2 = x$ ($x \geq 0$)，与 $y = x$ ($x \in \mathbb{R}$) 的定义域不同，不是同一函数；

对于 B， $y = \log_3 3^x = x$ ($x \in \mathbb{R}$)，与 $y = x$ ($x \in \mathbb{R}$) 的定义域相同，对应关系也相同，是同一函数；

对于 C， $y = 2^{\log_2 x} = x$ ($x > 0$)，与 $y = x$ ($x \in \mathbb{R}$) 的定义域不同，不是同一函数；

对于 D， $y = \sqrt{x^2} = |x|$ ($x \in \mathbb{R}$)，与 $y = x$ ($x \in \mathbb{R}$) 的对应关系不同，不是同一函数.

故选：D.

6. 幂函数的图象过点 $(2, \frac{1}{16})$, 则它的单调递增区间是 ()

A. $(-\infty, 2)$ B. $(0, +\infty)$ C. $(-\infty, 0)$ D. $(-\infty, +\infty)$

【考点】4U: 幂函数的概念、解析式、定义域、值域.

【分析】设出幂函数的解析式, 将已知点的坐标代入, 求出幂函数的解析式, 由于幂指数大于 0, 求出单调区间.

【解答】解: 设幂函数 $f(x) = x^a$,

则 $2^a = \frac{1}{16}$, 解得 $a = -4$

$\therefore f(x) = x^{-4}$;

$\therefore f(x) = x^{-4}$ 的单调递增区间是 $(-\infty, 0)$,

故选：C.

7. 某厂印刷某图书总成本 y (元)与图书日印量 x (本)的函数解析式为 $y = 5x + 4000$, 而图书出厂价格为每本 10 元, 则该厂为了不亏本, 日印图书至少为 ()

A. 200 本 B. 400 本 C. 600 本 D. 800 本

【考点】3T: 函数的值.

【分析】该厂为了不亏本, 日印图书至少为 x 本, 则利润函数 $f(x) = 10x - (5x + 4000) \geq 0$, 由此能求出结果.

【解答】解: 该厂为了不亏本, 日印图书至少为 x 本,

则利润函数 $f(x) = 10x - (5x + 4000) \geq 0$,

解得 $x \geq 800$.

$\therefore$ 该厂为了不亏本, 日印图书至少为 800 本.

故选：D.

8. 已知 $a = \log_{0.7} 0.6$, $b = \ln 0.6$, $c = 0.7^{0.6}$, 则 ()

A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $c > a > b$ D. $c > b > a$

【考点】4M: 对数值大小的比较.

【分析】利用对数函数与指数函数的单调性即可得出.

【解答】解：∵ $a=\log_{0.7}0.6>\log_{0.7}0.7=1$ ， $b=\ln 0.6<0$ ， $c=0.7^{0.6}\in(0,1)$ ，

∴ $a>c>b$ ．

故选：B．

9. 已知偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增，则满足 $f(2x-1)<f(1)$ 的 x 取值范围是 ()

A. $(-1, 0)$ B. $(0, 1)$ C. $(1, 2)$ D. $(-1, 1)$

【考点】3N：奇偶性与单调性的综合．

【分析】根据题意，由函数的奇偶性分析可得 $f(2x-1)<f(1)\Rightarrow f(|2x-1|)<f(1)$ ，进而结合单调性分析可得 $|2x-1|<1$ ，解可得 x 的取值范围，即可得答案．

【解答】解：根据题意， $f(x)$ 为偶函数，则 $f(2x-1)<f(1)\Rightarrow f(|2x-1|)<f(1)$ ，

又由函数在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增，

则 $f(|2x-1|)<f(1)\Rightarrow |2x-1|<1$ ，

解可得： $0<x<1$ ，

故选：B．

10. 已知方程 $|2^x-1|=a$ 有两个不等实根，则实数 a 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, 0)$ B. $(1, 2)$ C. $(0, +\infty)$ D. $(0, 1)$

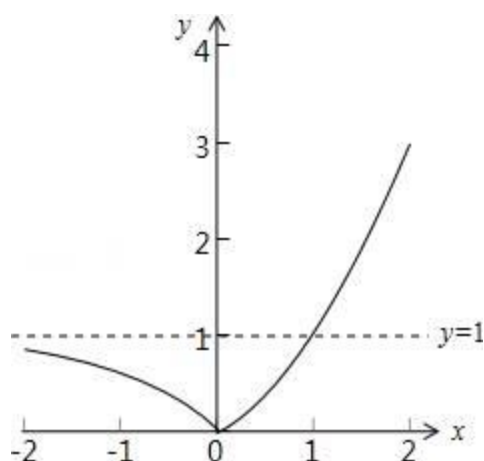
【考点】54：根的存在性及根的个数判断．

【分析】若关于 x 的方程 $|2^x-1|=a$ 有两个不等实数根，则函数 $y=|2^x-1|$ 的图象与 $y=a$ 有两个交点，画出函数 $y=|2^x-1|$ 的图象，数形结合可得实数 a 的取值范围．

【解答】解：若关于 x 的方程 $|2^x-1|=a$ 有两个不等实数根，

则 $y=|2^x-1|$ 的图象与 $y=a$ 有两个交点，

函数 $y=|2^x-1|$ 的图象如下图所示：



由图可得，当 $a \in (0, 1)$ 时，函数 $y = |2^x - 1|$ 的图象与 $y = a$ 有两个交点，
故实数 a 的取值范围是 $(0, 1)$ ，
故选：D

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）.

11. $27^{\frac{1}{3}} - (3^{0.5})^2 + 8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{4}$.

【考点】46：有理数指数幂的化简求值.

【分析】根据有理数指数幂的运算规律化简计算.

【解答】解：原式 $= (3^3)^{\frac{1}{3}} - 3 + (2^3)^{-\frac{2}{3}} = 3 - 3 + 2^{-2} = \frac{1}{4}$.

故答案为： $\frac{1}{4}$.

12. 函数 $f(x) = a^{2x+1} + 2$ ($a > 0$ ，且 $a \neq 1$) 图象恒过的定点坐标为 $(-\frac{1}{2}, 3)$.

【考点】4A：指数函数的图象变换.

【分析】由 $2x+1=0$ 求得 x 值，进一步求得 y 值得答案.

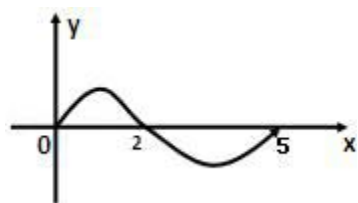
【解答】解：由 $2x+1=0$ ，解得 $x = -\frac{1}{2}$ ，此时 $y = a^0 + 2 = 3$ ，

$\therefore$ 数 $f(x) = a^{2x+1} + 2$ ($a > 0$ ，且 $a \neq 1$) 图象恒过的定点坐标为： $(-\frac{1}{2}, 3)$.

故答案为： $(-\frac{1}{2}, 3)$.

13. 设偶函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-5, 5]$. 当 $x \in [0, 5]$ 时， $f(x)$ 的图象如图，

则不等式 $f(x) > 0$ 的解集为 $(-2, 0) \cup (0, 2)$.



【考点】 3L: 函数奇偶性的性质; 3O: 函数的图象.

【分析】 先求得不等式 $f(x) > 0$ 在 $[0, 5]$ 上的解集, 再根据它的图象关于 y 轴对称, 可得得不等式 $f(x) > 0$ 在 $[-5, 0]$ 上的解集, 综合可得结论.

【解答】 解: 结合函数 $f(x)$ 在 $[0, 5]$ 上的图象, 可得得不等式 $f(x) > 0$ 在 $[0, 5]$ 上的解集为 $(0, 2)$.

再根据 $f(x)$ 为偶函数, 它的图象关于 y 轴对称, 可得得不等式 $f(x) > 0$ 在 $[-5, 0]$ 上的解集为 $(-2, 0)$.

综上可得, 不等式 $f(x) > 0$ 的解集为 $(-2, 0) \cup (0, 2)$,

故答案为 $(-2, 0) \cup (0, 2)$.

14. 函数 $f(x) = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 在区间 $[1, 2]$ 上的最大值为 4, 最小值为 m , 则 $m =$ 2.

【考点】 49: 指数函数的图象与性质.

【分析】 根据指数函数的单调性, 进行讨论解方程即可得到结论.

【解答】 解: 若 $a > 1$, $\because$ 函数 $f(x) = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) 在区间 $[1, 2]$ 上的最大值为 4, 最小值为 m ,

$\therefore a^2 = 4$, 解得: $a = 2$, 而 $m = a$, 故 $m = 2$, 符合题意;

若 $0 < a < 1$, $\because$ 函数 $f(x) = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) 在区间 $[1, 2]$ 上的最大值为 4, 最小值为 m ,

$\therefore a = 4$, $m = a^2$, 解得 $m = 16$, 不合题意,

$\therefore m = 2$,

故答案为: 2.

15. 定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 当 $x < 0$ 时, $f(x) = 2x^2 - x$, 则当 $x > 0$ 时, $f(x) =$ $-2x^2 - x$.

【考点】3L: 函数奇偶性的性质.

【分析】任取 $x > 0$, 则 $-x < 0$, 结合当 $x < 0$ 时, $f(x) = 2x^2 - x$, $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, $f(x) = -f(-x)$, 可得 $x > 0$ 时, $f(x)$ 的解析式;

【解答】解: $\because$ 当 $x < 0$ 时, $f(x) = 2x^2 - x$,

任取 $x > 0$, 则 $-x < 0$,

$$\therefore f(-x) = 2(-x)^2 + x = 2x^2 + x.$$

$\because f(x)$ 是奇函数,

$$\therefore f(x) = -f(-x) = -2x^2 - x.$$

故 $x > 0$ 时, $f(x) = -2x^2 - x$,

故答案为: $-2x^2 - x$.

16. 已知函数 $f(x) = \log_a x + x - b$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$), 当 $3 < a < 4 < b < 5$ 时, 函数 $f(x)$ 的零点 $x_0 \in (n, n+1)$, $n \in \mathbb{N}^*$, 则 $n = \underline{3}$.

【考点】52: 函数零点的判定定理.

【分析】根据 a, b 的范围判断 $f(3), f(4)$ 的符号, 从而得出零点 x_0 的范围.

【解答】解: $\because 3 < a < 4 < b < 5$,

$$\therefore 0 < \log_a 3 < 1, 1 < \log_a 4 < 2, -2 < 3 - b < -1, -1 < 4 - b < 0,$$

$$\therefore f(3) = \log_a 3 + 3 - b < 0, f(4) = \log_a 4 + 4 - b > 0,$$

$\therefore f(x)$ 在 $(3, 4)$ 上存在零点.

故答案为 3.

三、解答题: 共 56 分.

17. 已知集合 $A = \{x | a - 1 < x < 2a + 1\}$, $B = \{x | 0 < x < 5\}$.

(1) 当 $a = 0$ 时, 求 $A \cap B$;

(2) 若 $A \subseteq B$, 求实数 a 的取值范围.

【考点】18: 集合的包含关系判断及应用.

【分析】(1) 当 $a = 0$ 时, 求出 $A = \{x | -1 < x < 1\}$, $B = \{x | 0 < x < 5\}$. 由此能求出 $A \cap B$.

(2) $A \subseteq B$, 当 $A = \emptyset$ 时, $a - 1 \geq 2a + 1$, a , 当 $A \neq \emptyset$ 时, 列出不等式组, 由此能求

出实数 a 的取值范围.

【解答】解: (1) 当 $a=0$ 时, $A=\{x|-1<x<1\}$, $B=\{x|0<x<5\}$.

$$\therefore A \cap B = \{x|0<x<1\}$$

$$(2) A \subseteq B$$

①当 $A=\emptyset$ 时, $a-1 \geq 2a+1$, $a \leq -2$, 成立,

②当 $A \neq \emptyset$, 即 $a > -2$ 时, $\begin{cases} a-1 \geq 0 \\ 2a+1 \leq 5 \end{cases}$

$$\therefore 1 \leq a \leq 2$$

$\therefore$ 实数 a 的取值范围 $(-\infty, -2] \cup [1, 2]$.

18. 已知二次函数 $f(x) = 2kx^2 - 2x - 3k - 2$, $x \in [-5, 5]$.

(1) 当 $k=1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的最大值和最小值;

(2) 求实数 k 的取值范围, 使 $y=f(x)$ 在区间 $[-5, 5]$ 上是单调函数.

【考点】3W: 二次函数的性质.

【分析】(1) 当 $k=1$ 时, $f(x) = 2x^2 - 2x - 5$, 可得区间 $(-5, \frac{1}{2})$ 上函数为减函数, 在区间 $(\frac{1}{2}, 5)$ 上函数为增函数. 由此可得 $[f(x)]_{\max}=55$, $[f(x)]_{\min} = -\frac{11}{2}$;

(2) 由题意, 得函数 $y=f(x)$ 的单调减区间是 $[a, +\infty)$, 由 $[-5, 5] \subset [a, +\infty)$ 解出 $a \leq -5$, 即为实数 a 的取值范围.

【解答】解: (1) 当 $k=1$ 时, 函数表达式是 $f(x) = 2x^2 - 2x - 5$,

$\therefore$ 函数图象的对称轴为 $x = \frac{1}{2}$,

在区间 $(-5, \frac{1}{2})$ 上函数为减函数, 在区间 $(\frac{1}{2}, 5)$ 上函数为增函数.

$\therefore$ 函数的最小值为 $[f(x)]_{\min} = f(\frac{1}{2}) = -\frac{11}{2}$,

函数的最大值为 $f(5)$ 和 $f(-5)$ 中较大的值, 比较得 $[f(x)]_{\max} = f(-5) = 55$.

综上所述, 得 $[f(x)]_{\max}=55$, $[f(x)]_{\min} = -\frac{11}{2}$.

(2) $\because$ 二次函数 $f(x)$ 图象关于直线 $x = \frac{1}{2k}$ 对称,

$\therefore$ 要使 $y=f(x)$ 在区间 $[-5, 5]$ 上是单调函数,

则必有 $\frac{1}{2k} \leq -5$ 或 $\frac{1}{2k} \geq 5$,

解得 $-\frac{1}{10} \leq k < 0$ 或 $0 < k \leq \frac{1}{10}$.

即实数 k 的取值范围为 $[-\frac{1}{10}, 0) \cup (0, \frac{1}{10}]$.

19. 已知函数 $f(x) = \lg[(\frac{1}{2})^x - 2^x]$.

(1) 求 $f(x)$ 的定义域;

(2) 判断函数 $f(x)$ 在定义域上的单调性并给出证明.

【考点】4N: 对数函数的图象与性质.

【分析】(1) 要使 $f(x)$ 有意义, 须 $(\frac{1}{2})^x - 2^x > 0$, 即 $2^{-x} > 2^x$, 利用指数函数的单调性解出即可得出.

(2) $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是减函数. 利用定义及其指数函数的单调性即可给出证明.

【解答】解: (1) 要使 $f(x)$ 有意义, 须 $(\frac{1}{2})^x - 2^x > 0$,
即 $2^{-x} > 2^x$, 可得: $-x > x$, $\therefore x < 0$.

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x | x < 0\}$.

(2) $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是减函数. 下面给出证明:

设 $x_2 < 0$, $x_1 < 0$, 且 $x_2 > x_1$, 则 $x_2 - x_1 > 0$

令 $g(x) = (\frac{1}{2})^x - 2^x$,

则 $g(x_2) - g(x_1) = (\frac{1}{2})^{x_2} - 2^{x_2} - (\frac{1}{2})^{x_1} + 2^{x_1}$

$= (\frac{1}{2})^{x_2} - (\frac{1}{2})^{x_1} + 2^{x_1} - 2^{x_2}$

$= \frac{2^{x_1} - 2^{x_2}}{2^{x_1} \cdot 2^{x_2}} + (2^{x_1} - 2^{x_2})$

$= (\frac{1}{2^{x_1} \cdot 2^{x_2}} + 1)(2^{x_1} - 2^{x_2})$

$\because 0 < \frac{1}{2} < 1$, $x_1 < x_2 < 0$,

$\therefore 2^{x_1} - 2^{x_2} < 0$

$$g(x_2) - g(x_1) < 0, \therefore g(x_2) < g(x_1)$$

$$\therefore \lg[g(x_2)] < \lg[g(x_1)],$$

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是减函数.

20. 已知函数 $f(x) = \frac{(x+2)(x+k)}{x^2}$ 为偶函数.

(1) 求实数 k 的值;

(2) 记集合 $E = \{y | y = f(x), x \in \{-2, 1, 2\}\}$, $\lambda = \lg^2 2 + \lg 2 \cdot \lg 5 + \lg 5 - 4$, 判断 λ 与集合 E 的关系;

(3) 当 $x \in [\frac{1}{m}, \frac{1}{n}]$ ($m > 0, n > 0$) 时, 若函数 $f(x)$ 的值域为 $[2 - 5m, 2 - 5n]$, 求实数 m, n 的值.

【考点】 3L: 函数奇偶性的性质.

【分析】 (1) 根据函数 $f(x) = \frac{(x+2)(x+k)}{x^2}$ 为偶函数满足 $f(-x) = f(x)$, 构造关于 a 的方程组, 可得 a 值;

(2) 由 (1) 中函数 $f(x)$ 的解析式, 将 $x \in \{-1, 1, 2\}$ 代入求出集合 E , 利用对数的运算性质求出 λ , 进而根据元素与集合的关系可得答案

(3) 求出函数 $f(x)$ 的导函数, 判断函数的单调性, 进而根据函数 $f(x)$ 的值域为 $[2 - 3m, 2 - 3n]$, $x \in [\frac{1}{m}, \frac{1}{n}]$ ($m > 0, n > 0$) 构造关于 m, n 的方程组, 进而得到 m, n 的值

【解答】 解: (1) $\because f(x)$ 为偶函数,

$$\therefore f(x) = f(-x),$$

$$\text{即 } \frac{(x+2)(x+k)}{x^2} = \frac{(-x+2)(-x+k)}{x^2},$$

$$\text{即 } 2(k+2)x = 0, x \in \mathbb{R} \text{ 且 } x \neq 0,$$

$$\therefore k = -2.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 可知, } f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2},$$

$$\text{当 } x = \pm 2 \text{ 时, } f(x) = 0;$$

$$\text{当 } x = 1 \text{ 时, } f(x) = -3;$$

$$\therefore E = \{0, -3\},$$

$$\text{而}\lambda=\lg^2 2+\lg 2\bullet\lg 5+\lg 5-4,$$

$$=\lg^2 2+\lg 2(1-\lg 2)+1-\lg 2-4=-3,$$

$$\therefore \lambda \in E.$$

$$(3) \because f(x) = \frac{x^2-4}{x^2} = 1 - \frac{4}{x^2}, \quad x \in \left[\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right],$$

$$\therefore f(x) \text{ 在 } \left[\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right] \text{ 上单调递增,}$$

$$\therefore \begin{cases} f\left(\frac{1}{m}\right)=2-5m \\ f\left(\frac{1}{n}\right)=2-5n \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} 1-4m^2=2-5m \\ 1-4n^2=2-5n \end{cases},$$

$$\text{即} \begin{cases} 4m^2-5m+1=0 \\ 4n^2-5n+1=0 \end{cases},$$

$$\therefore m, n \text{ 是方程 } 4x^2 - 5x + 1 = 0 \text{ 的两个根,}$$

$$\text{又由题意可知 } \frac{1}{m} < \frac{1}{n}, \text{ 且 } m > 0, n > 0, \therefore m > n.$$

$$\therefore m=1, n=\frac{1}{4}.$$