三胜三校（理科）数学试卷一

一、选择题

1. 设集合 $A=\left\{x\left|x^2-2x\le 0\right.\right\}$，$B=\left\{x\left|-4\le x\le 0\right.\right\}$，则 $A\cap C_R B$ 等于（ C ）

(A) R　(B) $\left\{x\left|x\in R,x\ne 0\right.\right\}$　(C) $\left\{x\left|0<x\le 2\right.\right\}$　(D) $\varnothing$

2．若复数 z 满足 $iz=2+4i$,则在复平面内, z 对应的点的坐标是(C)

（A）$\left(2,4\right)$　（B）$\left(2,-4\right)$　（C）$\left(4,-2\right)$　（D）$\left(4,2\right)$

3．直线 m,n 不在平面 α,β 内，则下列命题中正确命题的个数是　（　　）

①若 $m//n$ 且 $n//\alpha$，则 $m//\alpha$　②若 $m//\beta$ 且 $\alpha//\beta$，则 $m//\alpha$

③若 $m\perp n$ 且 $n\perp\alpha$，则 $m//\alpha$　④若 $m\perp\beta$ 且 $\alpha\perp\beta$，则 $m//\alpha$

（A）1　（B）2　（C）3　（D）4

4．若 $\left(x^2+\dfrac{a}{x}\right)^5$ 的二项展开式中 x^7 项的系数为 -10，则实数 $a=$(D).

（A）1　（B）-1　（C）2　（D）-2

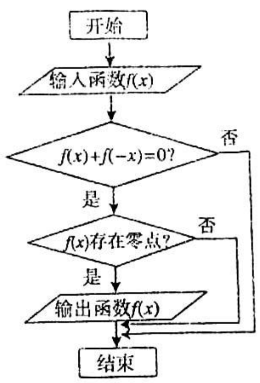
5. 某流程图如图所示，现输入如下四个函数，则可以输出的函数是（ B ）

（A）$f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

（B）$f(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^x+1}$

（C）$f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

（D）$f(x)=\sin(\dfrac{\pi}{2}+x)$



6．已知公差不为 0 的等差数列{ a_n } 的前 n 项和为 S_n，$S_3=a_4+4$，且 a_1,a_3,a_{11} 成等比数列，则 a_2 等于(A)

（A） 5　（B）10　（C）17　（D）20

7． $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\dfrac{x}{2}dx=$　（　　）

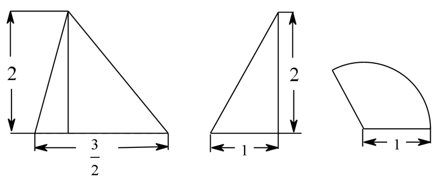
（A）0　（B）$\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}$　（C）$\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{4}$　（D）$\dfrac{\pi}{2}-1$

8．变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}y\ge -1\\ x-y\ge 2\\ 3x+y\le 14\end{cases}$，若 $z=ax+y$ 得最大值为1，则 $a=$（　）

A．$-\dfrac{1}{4}$　B．-2　C．$-\dfrac{1}{4}$ 或 -2　D．$\dfrac{1}{4}$ 或 -2

9. 某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为（　）

A. $\dfrac{2\pi}{3}$　**B.** $\dfrac{\pi}{3}$　**C.** $\dfrac{2\pi}{9}$　**D.** $\dfrac{\pi}{9}$



10．设 $a\in\left\{1,2,3,4\right\},b\in\left\{2,4,8,12\right\}$，则函数 $f(x)=x^3+ax-b$ 在区间 $\left[1,2\right]$ 上由零点的概率为（　）

A． $\frac{1}{2}$　　**B．** $\frac{5}{8}$　　**C．** $\frac{3}{4}$　　**D．** $\frac{11}{16}$

11．双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点为 $F(c,0)$，以原点为圆心，c 为半径的圆与双曲线在二象限的交点为 A，若圆在 A 点的切线的斜率为 $-\sqrt{3}$，则双曲线的离心率为（　）

A． $2\sqrt{3}$　　**B．** $\sqrt{6}$　　**C．** $\sqrt{3}$　　**D．** $\sqrt{2}$

12．**函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，且 $x>0$ 时 $f(x)=e^{-x}(x-2)$，则下面结论中正确的是（　）**

A． $f(x)$ **有 5 个不同的零点**　　**B．若方程 $f(x)=k$ 有三个不同的解，则 $k\in\left(-\frac{1}{e^3},\frac{1}{e^3}\right)$**

C．函数 $f(x)$ 的值域为 R　　**D．函数 $f(x)$ 在区间 $(-3,3)$ 单调递增**

二、填空题

13．若向量 $\overline{a}$，$\overline{b}$ 满足 $|\overline{a}|=1$，$|\overline{b}|=2$ 且 $\overline{a}$ 与 $\overline{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，则 $|2\overline{a}+\overline{b}|=$________. $2\sqrt{3}$

14．**正四面体 $ABCD$ 的棱长为 4，E 为棱 BC 的中点，过 E 作其外接球的截面，则截面面积的最小值为_______.**

15. 若 $\cos(\alpha+\frac{\pi}{6})-\sin\alpha=\frac{3\sqrt{3}}{5}$，则 $\sin(\alpha+\frac{5\pi}{6})=$________.（$\frac{3}{5}$）

16. 已知数列 $\left\{a_n\right\}$ 为等差数列，第三项为 4，前 6 项和为 27，数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和为 S_n，对一切 $n\in N^*$，恒有 $S_{2n}-S_n>\frac{m}{16}$ 成立，则 m 的最大整数为________.　（5）

三、解答题

17．**（本小题满分 12 分）三角形 ABC 中，内角 A、B、C 所对边 a、b、c 成公比小于 1 的等比数列，且 $\sin B+\sin(A-C)=2\sin 2C$.**

（I）求 B 角的余弦值；

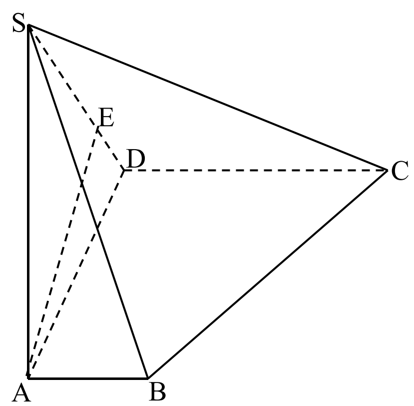
（II）若 $b=\sqrt{3}$，求 ΔABC 的面积.

18．（本小题满分 12 分）

如图，在四棱锥 $S-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是直角梯形，AD 垂直于 AB 和 DC，侧棱 $SA\perp$ 底面 $ABCD$，且 $SA=2,AD=DC=1$.

(Ⅰ) 若点 E 在 SD 上，且 $AE\perp SD$. 证明: $AE\perp$ 平面 SDC；

(Ⅱ)若三棱锥 $V_{S-ABC}=\frac{1}{6}$,求面 SAD 与面 SBC 所成二面角的正弦值大小.



（Ⅰ）证明：$\because$ 侧棱 $SA\perp$ 底面 $ABCD$， $CD\subset$ 底面 $ABCD$

$\therefore SA\perp CD$.

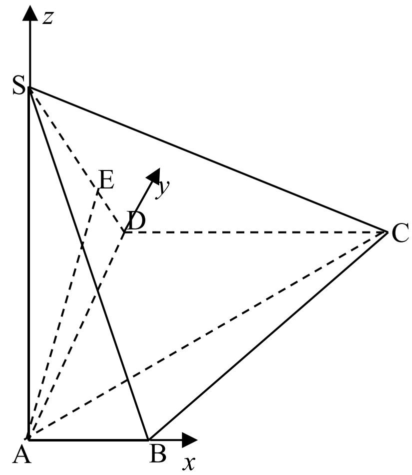
又 $\because$ 底面 $ABCD$ 是直角梯形， AD 垂直于 AB 和 DC

$\therefore AD\perp CD$, 又 $AD\cap SA=A$

$\therefore CD\perp$ 侧面 SAD， $AE\subset$ 侧面 SAD

$\therefore\ AE\perp CD, AE\perp SD, CD\cap SD=D$

$\therefore\ AE\perp$ 平面 SDC



（Ⅱ）连结 AC，$\because$ 底面 $ABCD$ 是直角梯形， AD 垂直于 AB 和 DC，

$SA=2, AD=DC=1.\ \therefore\ AC=\sqrt{2}$，$\angle CAB=\dfrac{\pi}{4}$，设 $AB=t$，则

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}AC\cdot t=\dfrac{1}{2}t$， $\because$ 三棱锥 $V_{S-ABC}=\dfrac{1}{6}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}t$，$\therefore\ t=AB=\dfrac{1}{2}$.

如图建系，则 $A(0,0,0), S(0,0,2), D(0,1,0), B(\dfrac{1}{2},0,0), C(1,1,0)$，由题意平面 SAD 的一个法向量为 $\vec{m}=(1,0,0)$，不妨设平面 SBC 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$， $\overrightarrow{SB}=(\dfrac{1}{2},0,-2)$

$\overrightarrow{SC}=(1,1,-2)$，则 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{SB}=0, \vec{n}\cdot\overrightarrow{SC}=0$，得 $\begin{cases}x-4z=0\\ x+y-2z=0\end{cases}$，不妨令 $z=1$，则 $\vec{n}=(4,-2,1)$

$\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{4}{\sqrt{21}}$，

设面 SAD 与面 SBC 所成二面角为 θ，则 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{105}}{21}$

19. 已知随机抽取某城市一年(365 天)内 100 天的空气质量指数 API 的监测数据，统计如下：

API	[0,50]	（50,100]	（100,150]	（150,200]	（200,250]	（250,300]	>300
空气质量	优	良	轻微污染	轻度污染	中度污染	中度重污染	重度污染
天数	4	13	18	30	9	11	15

（Ⅰ）若某企业每天由空气污染造成的经济损失 S（单位：元）与 API 指数 w 的关系式为：

$$S=\begin{cases}0, & 0\le w\le 100\\ 4w-400, & 100<w\le 300\\ 2000, & w>300\end{cases}$$

试估计本年内 S 大于 200 元且不超过 600 元的概率;

（Ⅱ）若本次抽取的样本数据有 30 天是在供暖季，其中有 6 天为重度污染，能否在犯错误的概率不超过 0.10 的前提下认为本年空气重度污染与供暖有关？

附：

$P(K^2\geq k_0)$	0.25	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	1.323	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

解：（Ⅰ）由 $200<S\le 600$，得 $150<w\le 250$，频数为 39，概率为 0.39

（Ⅱ）根据以上数据得到如下列联表：

	非重度污染	重度污染	合计
供暖季	24	6	30

非供暖季	61	9	70
合计	85	15	100

K^2的观测值 $k=\dfrac{100\times(24\times9-61\times6)^2}{85\times15\times30\times70}\approx2.723$

由于 2.723>2.706,所以能在犯错误的概率不超过 0.10 的前提下认为空气重度污染与供暖有关.

20.（本小题满分 12 分）

椭圆 M：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，且经过点 $P(1,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$. 直线 l_1： $y=k_1x+m_1$ 与椭圆 M 交于 A,C 两点，直线 l_2： $y=k_2x+m_2$ 与椭圆 M 交于 B,D 两点.，四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）求证：平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 相交于原点 O；

（Ⅲ）若平行四边形 $ABCD$ 为菱形，求菱形 $ABCD$ 面积的最小值.

21．已知函数 $f(x)=(x+1)e^{-x}$（e 为自然对数的底数）

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）设函数 $\varphi(x)=xf(x)+tf'(x)+e^{-x}$，存在实数 $x_1,\ x_2\in[0,1]$，使得 $2\varphi(x_1)<\varphi(x_2)$ 成立，求实数 t 的取值范围

解：（Ⅰ）∵函数的定义域为 **R**，$f'(x)=-\dfrac{x}{e^x}$

∴当 $x<0$ 时，$f'(x)>0$，当 $x>0$ 时，$f'(x)<0$。

∴ $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减。

（Ⅱ）假设存在 $x_1,\ x_2\in[0,1]$，使得 $2\varphi(x_1)<\varphi(x_2)$ 成立，则 $2[\varphi(x)]_{\min}<[\varphi(x)]_{\max}$。

$$\because \varphi(x)=xf(x)+tf'(x)+e^{-x}=\frac{x^2+(1-t)x+1}{e^x}$$

$$\therefore \varphi'(x)=\frac{-x^2+(1+t)x+t}{e^x}=-\frac{(x-t)(x-1)}{e^x}$$

①当 $t\ge1$ 时，$\varphi'(x)\le0$，$\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减，∴ $2\varphi(1)<\varphi(0)$，即 $t>3-\dfrac{e}{2}>1$。

②当 $t\le0$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，∴ $2\varphi(0)<\varphi(1)$，即 $t<3-2e<0$。

③当 $0<t<1$ 时，

在 $x\in[0,t)$，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 在 $[0,t]$ 上单调递减

在 $x\in(t,1]$，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 在 $[t,1]$ 上单调递增

所以 $2\varphi(t)<\max\{\varphi(0),\varphi(1)\}$，即 $2\dfrac{t+1}{e^t}<\max\{1,\dfrac{3-t}{e}\}$ —— (*)

由（Ⅰ）知，$g(t)=2\dfrac{t+1}{e^t}$ 在 $[0,1]$ 上单调递减

故 $\dfrac{4}{e}\le2\dfrac{t+1}{e^t}\le2$，而 $\dfrac{2}{e}\le\dfrac{3-t}{e}\le\dfrac{3}{e}$，所以不等式 (*) 无解

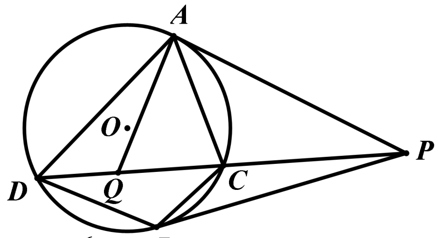
综上所述，存在 $t\in(-\infty,3-2e)\cup(3-\dfrac{e}{2},+\infty)$,使得命题成立.

22. 选修 4—1，几何证明选讲

如图，PA,PB 是圆 O 的两条切线，A,B 是切点，C 是劣弧 AB（不包括端点）上一点，直线 PC 交圆 O 于另一点 D，Q 在弦 CD 上，且 $\angle DAQ=\angle PBC$．求证：

（Ⅰ）$\dfrac{BD}{AD}=\dfrac{BC}{AC}$；

（Ⅱ）$\triangle ADQ \backsim \triangle DBQ$．



23、选修4－4：坐标系与参数方程

已知在直角坐标系 xOy 中，圆锥曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+4\cos\theta \\ y=2+4\sin\theta \end{cases}$（θ为参数），直线 l 经过定点 P（3，5），倾斜角为 $\dfrac{\pi}{3}$．

（Ⅰ）写出直线 l 的参数方程和圆的标准方程；

（Ⅱ）设直线 l 与圆相交于 A，B 两点，求｜PA｜·｜PB｜的值．

24、选修4－5：不等式选讲

设函数 $f(x)=|2x-1|-|x+2|$．

（Ⅰ）求不等式 $f(x)\geq 3$ 的解集；

（Ⅱ）若关于 x 的不等式 $f(x)\geq t^2-3t$ 在 $[0,1]$ 上无解，求实数 t 的取值范围.