

2016—2017 学年度期末试卷

高一数学（理）

本试卷共 100 分，考试时间 90 分钟。

题号	一	二	三			
			15	16	17	18
分数						

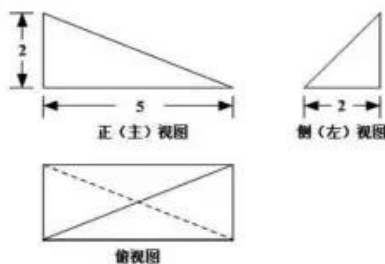
一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

- 直线 $x - y + 1 = 0$ 的斜率是 ()
 A. 1 B. -1 C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{3\pi}{4}$
- 方程 $x^2 + y^2 - 4x = 0$ 表示的圆的圆心和半径分别为 ()
 A. $(-2, 0)$, 2 B. $(-2, 0)$, 4 C. $(2, 0)$, 2 D. $(2, 0)$, 4
- 若两条直线 $ax + 2y - 1 = 0$ 与 $3x - 6y - 1 = 0$ 垂直，则 a 的值为 ()
 A. 4 B. -4 C. 1 D. -1
- 在空间直角坐标系中，点 $P(1, 2, -3)$ 关于坐标平面 xOy 的对称点为 ()
 A. $(-1, -2, 3)$ B. $(-1, -2, -3)$ C. $(-1, 2, -3)$ D. $(1, 2, 3)$
- 已知三条直线 m, n, l ，三个平面 α, β, γ ，下面说法正确的是 ()
 A. $\left. \begin{matrix} \alpha \perp \gamma \\ \beta \perp \gamma \end{matrix} \right\} \Rightarrow \alpha // \beta$ B. $\left. \begin{matrix} m \perp l \\ n \perp l \end{matrix} \right\} \Rightarrow m // n$
 C. $\left. \begin{matrix} m // \beta \\ l \perp m \end{matrix} \right\} \Rightarrow l // \beta$ D. $\left. \begin{matrix} m // n \\ n \perp \gamma \end{matrix} \right\} \Rightarrow m \perp \gamma$
- “直线 l 的方程为 $y = k(x - 2)$ ” 是 “直线 l 经过点 $(2, 0)$ ” 的 ()
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

7. 一个三棱锥的三视图如图所示, 则三棱锥的体积为 ()

A. $\frac{5}{3}$
C. $\frac{20}{3}$

B. $\frac{10}{3}$
D. $\frac{25}{3}$



8. 实数 x, y 满足 $\begin{cases} x-y+1 \geq 0, \\ x \leq 1, \\ y \geq a \end{cases}$, 若 $u=2x-y$ 的最小值为 -4 , 则实数 a 等于 ()

A. -4

B. -3

C. -2

D. 6

二. 填空题: 本大题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.

9. 双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 的渐近线方程为_____.

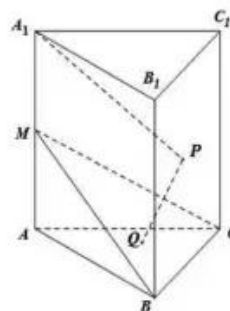
10. 点 P 是椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 上的一点, F_1, F_2 分别是椭圆的左右焦点, 则 $\triangle PF_1F_2$ 的周长是_____.

11. 已知命题 $p: \forall x > 1, x^2 - 2x + 1 > 0$, 则 $\neg p$ 是_____.

12. 在空间直角坐标系中, 已知点 $A(1,0,2), B(2,1,0), C(0,a,1)$, 若 $AB \perp AC$, 则实数 a 的值为_____.

13. 已知点 P 是圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上的动点, Q 是直线 $l: 3x + 4y - 10 = 0$ 上的动点, 则 $|PQ|$ 的最小值为_____.

14. 如图, 在棱长均为 2 的正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 点 M 是侧棱 AA_1 的中点, 点 P, Q 分别是侧面 BCC_1B_1 、底面 ABC 内的动点, 且 $A_1P \parallel$ 平面 BCM , $PQ \perp$ 平面 BCM , 则点 Q 的轨迹的长度为_____.



三. 解答题: 本大题共 4 小题, 共 44 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分 10 分)

已知圆 M 过点 $A(0, \sqrt{3})$, $B(1, 0)$, $C(-3, 0)$.

(I) 求圆 M 的方程;

(II) 过点 $(0, 2)$ 的直线 l 与圆 M 相交于 D 、 E 两点, 且 $|DE| = 2\sqrt{3}$, 求直线 l 的方程.

16. (本小题满分 10 分)

已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ ，过焦点 F 的直线 l 与抛物线 C 交于 A, B 两点，定点 $M(5, 0)$ 。

(I) 若直线 l 的斜率为 1，求 $\triangle ABM$ 的面积；

(II) 若 $\triangle AMB$ 是以 M 为直角顶点的直角三角形，求直线 l 的方程。

17. (本小题满分 12 分)

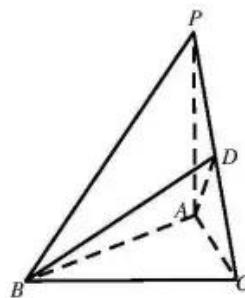
如图, 在底面是正三角形的三棱锥 $P-ABC$ 中, D 为 PC 的中点, $PA=AB=1$,

$$PB=PC=\sqrt{2}.$$

(I) 求证: $PA \perp$ 平面 ABC ;

(II) 求 BD 与平面 ABC 所成角的大小;

(III) 求二面角 $D-AB-C$ 的余弦值.



18. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 ，右顶点为 A ，上顶点为 B ， $\triangle BF_1F_2$ 是边长为 2 的正三角形.

(I) 求椭圆 C 的标准方程及离心率;

(II) 是否存在过点 F_2 的直线 l ，交椭圆于两点 P 、 Q ，使得 $PA \parallel QF_1$ ，如果存在，试求直线 l 的方程，如果不存在，请说明理由.

海淀区高二年级第一学期期末练习参考答案 2017.1

数 学 (理科)

阅卷须知:

1. 评分参考中所注分数, 表示考生正确做到此步应得的累加分数.
2. 其它正确解法可以参照评分标准按相应步骤给分.

一. 选择题: 本大题共 8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	C	A	D	D	A	B	C

二. 填空题: 本大题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.

9. $y = \pm 2x$
10. 6
11. $\exists x > 1, x^2 - 2x + 1 \leq 0$
12. -1
13. 1
14. $\frac{4}{3}$

三. 解答题: 本大题共 4 小题, 共 44 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

15. 解: (I) 设圆 $M: x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, 则

$$\begin{cases} 3 + \sqrt{3}E + F = 0 \\ 1 + D + F = 0 \\ 9 - 3D + F = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D = 2 \\ E = 0 \\ F = -3 \end{cases} \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

故圆 $M: x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$, 即 $(x+1)^2 + y^2 = 4$ (4 分)

(II) 由 (I) 得, $M(-1, 0)$.

设 N 为 DE 中点, 则 $MN \perp l$, $|DN| = |EN| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$ (5 分)

此时 $|MN| = \sqrt{4 - (\sqrt{3})^2} = 1$ (6 分)

当 l 的斜率不存在时, $l: x = 0$, 此时 $|MN| = 1$, 符合题意 (7 分)

当 l 的斜率存在时, 设 $l: y = kx + 2$, 由题意

$$\frac{|k(-1)+2|}{\sqrt{k^2+1}}=1 \quad \dots\dots\dots (8 \text{ 分})$$

$$\text{解得: } k=\frac{3}{4}, \quad \dots\dots\dots (9 \text{ 分})$$

$$\text{故直线 } l \text{ 的方程为 } y=\frac{3}{4}x+2, \text{ 即 } 3x-4y+8=0 \quad \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$$

综上直线 l 的方程为 $x=0$ 或 $3x-4y+8=0$

16. 解: (I) 解法 1: 由题意 $F(1,0)$, 当 AB 的斜率为 1 时, $l: y=x-1 \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

$$\begin{cases} y^2=4x \\ y=x-1 \end{cases} \Rightarrow y^2-4y-4=0 \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 由 $\Delta=4^2-4\times(-4)>0$

$$\text{故 } \begin{cases} y_1+y_2=4 \\ y_1 \cdot y_2=-4 \end{cases} \quad \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

$$\text{有 } |y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=4\sqrt{2} \quad \dots\dots\dots (4 \text{ 分})$$

$$\text{有 } S_{\triangle AMB}=S_{\triangle AMF}+S_{\triangle BMF}=\frac{1}{2} \cdot |y_1| \cdot 4+\frac{1}{2} \cdot |y_2| \cdot 4=2 \cdot |y_1-y_2|=8\sqrt{2} \quad \dots\dots\dots (5 \text{ 分})$$

解法 2: 由题意 $F(1,0)$, 当 AB 的斜率为 1 时, $l: y=x-1 \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

$$\begin{cases} y^2=4x \\ y=x-1 \end{cases} \Rightarrow x^2-6x+1=0 \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 由 $\Delta=4^2-4\times(-4)>0$

$$x_1+x_2=6, \quad |AB|=x_1+x_2+2=8 \quad \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

$$\text{点 } M \text{ 到直线 } AB \text{ 的距离 } d=\frac{|5-1|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2} \quad \dots\dots\dots (4 \text{ 分})$$

$$S_{\triangle ABM}=\frac{1}{2} \times 8 \times 2\sqrt{2}=8\sqrt{2} \quad \dots\dots\dots (5 \text{ 分})$$

(II) 解法 1: 易得, 直线 l 的斜率不为零, 设直线 l 的方程为 $x=my+1$

$$\begin{cases} y^2=4x \\ x=my+1 \end{cases} \Rightarrow y^2-4my-4=0 \quad \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$$

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 由 $\Delta=16m^2+16>0$, 得

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 4m \\ y_1 \cdot y_2 = -4 \end{cases} \dots\dots\dots (7 \text{ 分})$$

$$\text{由 } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0, \text{ 得 } (x_1 - 5)(x_2 - 5) + y_1 y_2 = 0, \dots\dots\dots (8 \text{ 分})$$

$$\text{即 } (my_1 - 4)(my_2 - 4) + y_1 y_2 = 0$$

$$\text{整理得: } (m^2 + 1)y_1 y_2 - 4m(y_1 + y_2) + 16 = 0$$

$$\text{此时有: } (m^2 + 1) \cdot (-4) - 4m \cdot (4m) + 16 = 0, \text{ 解得 } m = \pm \frac{\sqrt{15}}{5} \dots\dots\dots (9 \text{ 分})$$

故 l 的方程为

$$x = \frac{\sqrt{15}}{5}y + 1 \text{ 或 } x = -\frac{\sqrt{15}}{5}y + 1$$

$$\text{即 } 5x - \sqrt{15}y - 5 = 0 \text{ 或 } 5x + \sqrt{15}y - 5 = 0 \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$$

解法 2: 易知直线 $l \perp x$ 时不符合题意. 可设直线 l 的方程为 $y = k(x - 1)$.

$$\begin{cases} y = k(x - 1) \\ y^2 = 4x \end{cases},$$

$$\text{消去 } y, \text{ 可得 } k^2 x^2 - (2k^2 + 4)x + k^2 = 0. \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$$

则 $\Delta = 16(k^2 + 1) > 0$. 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则

$$x_1 + x_2 = 2 + \frac{4}{k^2}, \quad x_1 x_2 = 1. \dots\dots\dots (7 \text{ 分})$$

$$\text{由 } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0, \text{ 得 } (x_1 - 5)(x_2 - 5) + y_1 y_2 = 0, \dots\dots\dots (8 \text{ 分})$$

$$\text{即: } x_1 x_2 - 5(x_1 + x_2) + 25 - 4\sqrt{x_1 x_2} = 0,$$

$$\text{即: } 1 - 5(2 + \frac{4}{k^2}) + 25 - 4 = 0, \text{ 解得 } k = \pm \frac{\sqrt{15}}{3}. \dots\dots\dots (9 \text{ 分})$$

$$\text{故 } l \text{ 的方程为 } \sqrt{5}x - \sqrt{3}y - \sqrt{5} = 0 \text{ 或 } \sqrt{5}x + \sqrt{3}y - \sqrt{5} = 0.$$

\dots\dots\dots (10 分)

17. 解: (1) $\because PA = AB = 1, PB = \sqrt{2},$

$\therefore PA \perp AB$ \dots\dots\dots (1 分)

$\therefore$ 底面是正三角形

$$\therefore AC = AB = 1$$

$$\therefore PC = \sqrt{2}$$

$$\therefore PA \perp AC \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\therefore AB \cap AC = A$$

$$AB \subset \text{平面 } ABC$$

$$\therefore PA \perp \text{平面 } ABC, \quad \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

(II) 以 A 为原点, AB 为 x 轴, AP 为 z 轴, 平面 ABC 中垂直于 AB 的直线为 y 轴建立

$$\text{空间直角坐标系, 则 } A(0,0,0), B(1,0,0), C\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), P(0,0,1)$$

$$\dots\dots\dots (4 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } D\left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right), \overrightarrow{BD} = \left(-\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right). \quad \dots\dots\dots (5 \text{ 分})$$

$$\text{平面 } ABC \text{ 的法向量为 } \overrightarrow{n_1} = (0,0,1), \quad \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$$

记 BD 与平面 ABC 所成的角为 θ , 则

$$\sin \theta = \left| \cos \langle \overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{BD} \rangle \right| = \frac{1}{2} \quad \dots\dots\dots (7 \text{ 分})$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}. \quad \dots\dots\dots (8 \text{ 分})$$

(III) 设平面 ABD 的法向量为 $\overrightarrow{n_2} = (x, y, z)$,

$$\text{由 } \overrightarrow{n_2} \perp \overrightarrow{AD} \text{ 得: } \frac{1}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y + \frac{1}{2}z = 0, \quad \dots\dots\dots (9 \text{ 分})$$

$$\text{由 } \overrightarrow{n_2} \perp \overrightarrow{AB} \text{ 得: } x = 0$$

$$\text{代入上式得, } z = -\frac{\sqrt{3}}{2}y. \quad \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$$

$$\text{令 } y = 2, \text{ 则 } z = -\sqrt{3}, \text{ 因而, } \overrightarrow{n_2} = (0, 2, -\sqrt{3}). \quad \dots\dots\dots (11 \text{ 分})$$

$$\text{记二面角 } D-AB-C \text{ 的大小为 } \alpha, \text{ 则 } \cos \alpha = \left| \cos \langle \overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2} \rangle \right| = \frac{\sqrt{21}}{7}. \quad \dots\dots\dots (12 \text{ 分})$$

$$18. \text{ 解: (I) 由题意可得 } a = 2, b = \sqrt{3}, c = 1 \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\text{所以椭圆 } C \text{ 的标准方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \quad \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

椭圆的离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ (4 分)

(II) 解法 1: 由 (I) 得, $F_1(-1, 0)$, $F_2(1, 0)$, $A(2, 0)$, 设 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$

显然直线 l 的斜率不为零, 设直线 l 的方程为 $x = my + 1$, 则 (5 分)

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ x = my + 1 \end{cases} \Rightarrow 3(my+1)^2 + 4y^2 = 12 \text{ (6 分)}$$

整理得: $(3m^2 + 4)y^2 + 6my - 9 = 0$, 此时 $\Delta = 144m^2 + 144 > 0$, 故

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = -\frac{6m}{3m^2 + 4} \\ y_1 \cdot y_2 = -\frac{9}{3m^2 + 4} \end{cases} \text{ (7 分)}$$

注意到 $\overrightarrow{AP} = (x_1 - 2, y_1) = (my_1 - 1, y_1)$, $\overrightarrow{F_1Q} = (x_2 + 1, y_2) = (my_2 + 2, y_2)$

分)

若 $PA \parallel QF_1$, 则 $(my_1 - 1) \cdot y_2 = (my_2 + 2) \cdot y_1$, 即 $y_2 = -2y_1$ (9 分)

$$\text{此时由 } \begin{cases} y_2 = -2y_1 \\ y_1 + y_2 = -\frac{6m}{3m^2 + 4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{6m}{3m^2 + 4} \\ y_2 = -\frac{12m}{3m^2 + 4} \end{cases} \Rightarrow y_1 y_2 = -\frac{72m^2}{(3m^2 + 4)^2}, \text{ (10 分)}$$

$$\text{故 } -\frac{72m^2}{(3m^2 + 4)^2} = -\frac{9}{3m^2 + 4}, \text{ 解得 } 5m^2 = 4, \text{ 即 } m = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ (11 分)}$$

$$\text{故 } l \text{ 的方程为 } x = \frac{2}{\sqrt{5}}y + 1 \text{ 或 } x = -\frac{2}{\sqrt{5}}y + 1,$$

$$\text{即 } \sqrt{5}x - 2y - \sqrt{5} = 0 \text{ 或 } \sqrt{5}x + 2y - \sqrt{5} = 0 \text{ (12 分)}$$

解法 2: 由 (I) 得 $F_1(-1, 0)$, $F_2(1, 0)$, $A(2, 0)$.

直线 $l \perp x$ 时, $\frac{|PF_2|}{|QF_2|} = 1 \neq \frac{|AF_2|}{|F_1F_2|}$, 则 $PA \parallel QF_1$ 不成立, 不符合题意.

..... (5 分)

可设直线 l 的方程为 $y = k(x-1)$ (6 分)

$$\begin{cases} y = k(x-1), \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases},$$

消去 y , 可得 $(4k^2+3)x^2 - 8k^2x + 4k^2 - 12 = 0$ (7 分)

则 $\Delta = 144(k^2+1) > 0$. 设 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{4k^2+3} \text{ ①}, \quad x_1 x_2 = \frac{4k^2-12}{4k^2+3} \text{ ②} \quad \text{..... (8 分)}$$

$$\overrightarrow{AP} = (x_1 - 2, y_1), \quad \overrightarrow{F_1Q} = (x_2 + 1, y_2).$$

若 $PA \parallel QF_1$, 则 $\overrightarrow{AP} \parallel \overrightarrow{F_1Q}$,

$$\text{则 } k(x_1 - 2)(x_2 - 1) - k(x_2 + 1)(x_1 - 1) = 0.$$

$$\text{化简得 } 2x_1 + x_2 - 3 = 0 \text{ ③}. \quad \text{..... (9 分)}$$

$$\text{联立 ①③ 可得 } x_1 = \frac{4k^2+9}{4k^2+3}, \quad x_2 = \frac{4k^2-9}{4k^2+3}, \quad \text{..... (10 分)}$$

$$\text{代入 ② 可以解得 } k = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}. \quad \text{..... (11 分)}$$

$$\text{故 } l \text{ 的方程为 } \sqrt{5}x - 2y - \sqrt{5} = 0 \text{ 或 } \sqrt{5}x + 2y - \sqrt{5} = 0. \quad \text{..... (12 分)}$$