

高二理科 数学试卷

考试时间:120 分钟

试题满分:150 分

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 命题 $p: \exists x \in R, x^2 - 3x + 1 > 0$ 的 $\neg p$ 是

(A) $\forall x \in R, x^2 - 3x + 1 \geq 0$ (B) $\exists x \in R, x^2 - 3x + 1 \leq 0$

(C) $\forall x \in R, x^2 - 3x + 1 \leq 0$ (D) $\exists x \in R, x^2 - 3x + 1 \geq 0$

2. 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_2 = 2$, 且数列 $\{\frac{1}{a_n + 1}\}$ 是等差数列, 则 a_3 等于

(A) $\frac{1}{3}$ (B) 3 (C) 5 (D) 2007

3. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n 满足 $S_n = 3^n + 1$, 数列 $\{a_n\}$

(A) 是等差数列

(B) 既是等差数列又是等比数列

(C) 是等比数列

(D) 既不是等差数列又不是等比数列

4. 命题 $p: \forall x, y \in R$, 如果 $xy = 0$, 则 $x = 0$ 或 $y = 0$. 下列判断正确的个数是

①命题 p 的逆命题是: $\forall x, y \in R$, 如果 $x = 0$ 或 $y = 0$, 则 $xy = 0$;

②命题 p 的否命题是: $\forall x, y \in R$, 如果 $xy \neq 0$, 则 $x \neq 0$ 且 $y \neq 0$;

③命题 p 的逆否命题是: $\forall x, y \in R$, 如果 $x \neq 0$ 且 $y \neq 0$, 则 $xy \neq 0$.

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

5. 下列命题中, 正确命题的个数是

① $a > b \Rightarrow ac^2 > bc^2$

② $a \geq b \Rightarrow ac^2 \geq bc^2$

③ $\frac{a}{c} > \frac{b}{c} \Rightarrow ac > bc$

④ $\frac{a}{c} \geq \frac{b}{c} \Rightarrow ac \geq bc$

⑤ $a > b$ 且 $ac > bc \Rightarrow c > 0$

⑥ $a \geq b$ 且 $ac \geq bc \Rightarrow c \geq 0$

(A) 2

(B) 3

(C) 4

(D) 5

6. 若 $p: \begin{cases} x > 2 \\ y > 1 \end{cases}$, $q: \begin{cases} x + y > 3 \\ x \cdot y > 2 \end{cases}$; 则 p 是 q 成立的

(A) 充分非必要条件

(B) 必要非充分条件

(C) 充分必要条件

(D) 既不充分又不必要条件

7. 在数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_n = 129 - 4n^2$, 此数列的前 n 项和为 S_n , 则数列 $\{S_n\}$ 的

最大项是

(A) S_{15}

(B) S_5

(C) S_{17}

(D) S_7

8. 关于 x 的不等式 $ax + b > 0$ 的解集为 $(-\infty, 1)$, 则关于 x 的不等式 $\frac{bx - a}{x + 2} > 0$ 的

解集为

(A) $(-2, 1)$

(B) $(-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$

(C) $(-2, -1)$

(D) $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

9. 已知 $\triangle ABC$ 中, A 、 B 、 C 分别是三个内角, a 、 b 、 c 分别是角 A 、 B 、 C

的对边. 若 $\sin^2 A - \sin^2 C = (\sqrt{3}a - b)\sin B$ 且 $\triangle ABC$ 的外接圆的直径为 1, 则 C

等于

(A) 45°

(B) 30°

(C) 90°

(D) 60°

10. 已知 F_1 、 F_2 是椭圆的两个焦点, 过 F_1 且与椭圆长轴垂直的直线交椭圆于 A 、 B 两点, 若 $\triangle ABF_2$ 是正三角形, 则这个椭圆的离心率是

(A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

(C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

11. 若 $4x^2 + y^2 = 7$ ($x, y \in R$), 则 $4x\sqrt{1 + y^2}$ 的最大值为

(A) 8

(B) $\frac{7\sqrt{5}}{2}$

(C) $4\sqrt{5}$

(D) 以上都不对

12. (重要说明: 本题共设 (a) (b) (c) 三个小题, 请在三个小题中选作一题.)

(a) 已知平面区域 D 由以 $A(1, 2)$, $B(5, 3)$, $C(3, 1)$ 为顶点的三角形内部和边界组成.

若在区域 D 上有无穷多个点 (x, y) 可使目标函数 $z = x + my$ 取得最大值, 则 $m =$

(A) -1

(B) -2

(C) 2

(D) 4

(b) 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 上一点 P 到直线 $Ax + By + C = 0$ 的距离的最大值为

(A) $\frac{\sqrt{A^2 a^2 + B^2 b^2} + |C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

(B) $\frac{|\sqrt{A^2 a^2 + B^2 b^2} + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

$$(C) \frac{|\sqrt{A^2a^2 + B^2b^2} - C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$(D) \frac{|\sqrt{A^2a^2 + B^2b^2} - |C||}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

(c) 曲线: $|y - x^2| = 1 - |y|$ 所围成图形的面积为

(A) 2

(B) $2\sqrt{2}$

(C) 4

(D) $\frac{3\pi}{2}$

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分.

13. 设 $a > b > 0$, 集合 $M = \{x | b < x < \frac{a+b}{2}\}$, $N = \{x | \sqrt{ab} < x < a\}$, 则集合 $M \cap N =$ _____.

14. 实数 a 、 b 、 c 成等差数列, c 、 a 、 b 成等比数列, 则 $a : b : c =$ _____.

15. 某人向银行贷款 A 万元用于购房. 已知年利率为 r , 利息要按复利计算 (即本年的利息计入次年的本金生息). 如果贷款在今年 11 月 7 日完成, 则从明年开始, 每年的 11 月 6 日向银行等额还款 a 万元, n 年还清贷款 (及利息). 则 $a =$ _____ (用 A 、 r 和 n 表示).

16. (重要说明: 本题共设 (a) (b) (c) 三个小题, 请在三个小题中选择一题做出解答. 若解答超过一个, 则以所解答的第一小题计分.)

(a) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 2$ ($n \in N^*$), 则 $a_n =$ _____;

(b) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + n$ ($n \in N^*$), 则 $a_n =$ _____;

(c) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 2^n$ ($n \in N^*$), 则 $a_n =$ _____.

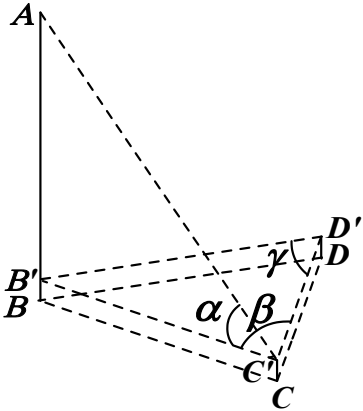
三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 74 分, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

下面是某组同学对辽宁广播电视塔进行塔高测量时所做的实习作业. 请将表格中“计算过程 (主要算式与结果)”一栏填写完整 (计算过程及结论保留三位有效数字).

实 习 作 业

2007 年 10 月 XX 日

测量项目	辽宁广播电视塔塔高测量		
测得的相 关数据	$\alpha = 65^\circ, \beta = 52^\circ,$ $\gamma = 77^\circ, CD = 112\text{m},$ $B'B = 1\text{m}.$	附图	
计算过程 (主要算式 与结果)			
参与测 量人员	略	课题 负责人	略
参与计 算人员	略	复核	略
指导教师 审核意见	略		
备注	1. 相关资料: 辽宁广播电视塔位于沈阳市南运河河畔, 于 1989 年建成, 塔高 305.5 米, 是当时我国最高的、世界第十高的广播电视塔. 目前 (2007 年) 辽宁广播电视塔是我国第九高的广播电视塔. 2. 参考数据: $\sin 13^\circ = 0.225, \cos 13^\circ = 0.974, \tan 13^\circ = 0.231,$ $\sin 26^\circ = 0.438, \cos 26^\circ = 0.899, \tan 26^\circ = 0.488,$ $\sin 39^\circ = 0.629, \cos 39^\circ = 0.777, \tan 39^\circ = 0.810,$ $\sin 52^\circ = 0.788, \cos 52^\circ = 0.616, \tan 52^\circ = 1.28,$ $\sin 65^\circ = 0.906, \cos 65^\circ = 0.423, \tan 65^\circ = 2.14.$ 		

18. (本小题满分 12 分)

(I) 已知 x 、 y 满足:
$$\begin{cases} x+3y-4 \leq 0 \\ 3x+y+4 \geq 0 \\ x-y \leq 0 \end{cases}$$
 若 $z=7x+y$, 求 z 的最大值和最小

值;

(II) 已知 x 、 y 满足:
$$\begin{cases} x+3y-4 \leq 0 \\ 3x+y+4 \geq 0 \\ x-y \geq 0 \end{cases}$$
 若 $z=7x+y$, 指出 z 的取值范围. (本

问只需写明结论即可, 不必书写证明、求解过程)

19. (本小题满分 12 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_2+a_4+a_8+a_{16}=88$, $a_{32}=95$. 数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_n=\log_2 b_n$ ($n \in N^*$).

(I) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(II) 设 $c_n=a_n b_n$, S_n 为数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项. 求 S_n .

20. (本小题满分 12 分)

点 $A(-a,0)$ 和 $A'(a,0)$ 是 x 轴上两定点, 点 P 满足 $k_{AP} \cdot k_{A'P} = -\frac{b^2}{a^2}$, 其中 $a > b > 0$. 设曲线 C 是点 P 的轨迹.

(I) 求曲线 C 的方程;

(II) 设点 M 是曲线 C 上一点, 直线 AM 、 $A'M$ 分别交 y 轴于点 M_1 和 M_2 . 求证: $|OM_1| \cdot |OM_2|$ 为定值;

(III) 设 B 、 B' 是曲线 C 与 y 轴的交点, 点 N 是曲线 C 上异于 B 、 B' 的一点, 直线 BN 、 $B'N$ 分别交 x 轴于点 N_1 和 N_2 , 则 $|ON_1| \cdot |ON_2|$ 为定值, 请写出这个值. (本问只需写明结论即可, 不必书写证明、求解过程)

21. (本小题满分 12 分)

定期定额投资, 是一种投资方法, 就是每隔一段固定时间(一个月或两个月)以固定的金额投资于同一投资产品. 对于大多数没有时间研究经济景气变化的投资人而言, 定期定额投资策略可以说是相当省时省力的投资方法, 并且还可以避免不小心买在高点的风险. 因此“定期定额投资”常被称为“懒人理财术”、“傻瓜理财术”.

下面我们以数学的方式来研究“定期定额投资”.

某投资产品 J 的单价是不断的上下波动变化的, 记其在 2007 年 7 月 1 日的单价为 t_1 元/单位, 在 2007 年 8 月 1 日的单价为 t_2 元/单位, 在 2007 年 9 月 1 日的单价为 t_3 元/单位, 在 2007 年 10 月 1 日的单价为 t_4 元/单位, 在 2007 年 11 月 1 日的单价为 t_5 元/单位.

我们来对比以下两种购买方式:

(a) 在上述五个日期中, 每次都购买 N 个单位的投资产品 J ;

(b) 在上述五个日期中, 每次都购买 M 元的投资产品 J (即定期定额投资策略);

设两种购买方式所购投资产品 J 的平均单价分别为 T_a 和 T_b , 显然: 平均单价 = $\frac{\text{投资总额}}{\text{所购产品的总单位数}}$.

(I) 用 t_1 、 t_2 、 t_3 、 t_4 、 t_5 , 表示 T_a 和 T_b ;

(II) 证明: $T_a \geq T_b$, 并指出 $T_a = T_b$ 的条件. (即定期定额投资平均单价较低)

22. (本小题满分 14 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 2$, 当 $n \in N^*$ 时 $na_{n+1} = S_n + n(n+1)$ 恒成立.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 设 $b_n = \frac{S_n}{2^n}$, 如果对一切正整数 n 都有 $b_n \leq t$, 求 t 的最小值;

(III) 设 $T_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n$ ($n \in N^*$), 证明: $T_n < 9$ ($n \in N^*$).