

2011—2012 下学期期末考试高二理科数学参考答案

一、选择题：1~5：CAABA 6~10：CDABA 11~12：DB

二、填空题：13、 $F + V - E = 2$ ； 14、3 或 7； 15、 $1 - 2i$ ； 16、 $x = 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$

三、解答题

17、解：（I）根据频率分布直方图中的数据，可得

$$(0.005 + 0.0075 + 0.0225 + 0.035 + a) \times 10 = 1$$

解得 $a = 0.03$ 2 分

（II）学生成绩在 $[50, 60)$ 内的共有 $40 \times 0.05 = 2$ 人，

在 $[60, 70)$ 内的共有 $40 \times 0.225 = 9$ 人

所以成绩在 $[50, 70)$ 内的共有 11 人。

设从成绩在 $[50, 70)$ 内的 11 人中随机选 3 人，且他们成绩都在 $[60, 70)$ 内为事件 A，

$$\text{则 } P(A) = \frac{C_9^3}{C_{11}^3} = \frac{28}{55}$$

所以选取的 3 名学生的成绩都在 $[60, 70)$ 内的概率为 $\frac{28}{55}$ 。6 分

（III）依题意， X 的可能取值是 1, 2, 3

$$P(X = 1) = \frac{C_2^2 C_9^1}{C_{11}^3} = \frac{3}{55}, \quad P(X = 2) = \frac{C_2^1 C_9^2}{C_{11}^3} = \frac{24}{55}, \quad P(X = 3) = P(A) = \frac{28}{55}.$$

所以 X 的分布列

X	1	2	3
P	$\frac{3}{55}$	$\frac{24}{55}$	$\frac{28}{55}$

为：

.....10 分

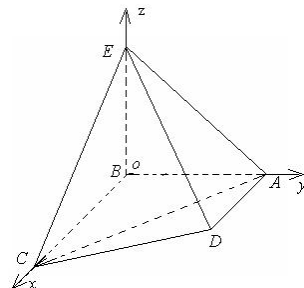
$$E(X) = 1 \times \frac{3}{55} + 2 \times \frac{24}{55} + 3 \times \frac{28}{55} = \frac{27}{11} \quad \text{.....12 分}$$

18、解：(I) 以 B 为原点, BC 为 x 轴, BA 为 y 轴, BE 为 z 轴,

建立空间直角坐标系(如图所示)

则 $B(0,0,0), C(2,0,0), A(0,2,0), D(1,2,0), E(0,0,2)$

$$\therefore \overrightarrow{DE} = (-1, -2, 2), \overrightarrow{AC} = (2, -2, 0)$$



$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{AC} \rangle = \frac{\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{DE}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{-1 \times 2 + (-2) \times (-2) + 2 \times 0}{\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 2^2} \times \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 0^2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$\therefore$ 异面直线 DE 与 AC 的成角为 $\arccos \frac{\sqrt{2}}{6}$ 4 分

(II) 假设在线段 CE 上存在点 F , 使平面 $BDF \perp$ 平面 ADE ;

设 $F(x, y, z)$, 由 $\overrightarrow{CF} = \lambda \overrightarrow{CE} (\lambda \in [0, 1])$

$$\text{则 } (x-2, y, z) = \lambda(-2, 0, 2) \therefore \begin{cases} x-2 = -2\lambda \\ y = 0 \\ z = 2\lambda \end{cases} \therefore \begin{cases} x = 2-2\lambda \\ y = 0 \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

$$\therefore F(2-2\lambda, 0, 2\lambda) \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

设平面 ADE 的法向量 $\overrightarrow{n_1} = (x_1, y_1, z_1)$

$$\text{则 } \begin{cases} \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \\ \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{AE} = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} (x_1, y_1, z_1) \cdot (1, 0, 0) = 0 \\ (x_1, y_1, z_1) \cdot (0, -2, 2) = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} x_1 = 0 \\ -2y_1 + 2z_1 = 0 \end{cases} \quad \text{取 } z_1 = 1,$$

$$\therefore \overrightarrow{n_1} = (0, 1, 1) \dots\dots 8 \text{ 分}$$

设平面 BDF 的法向量 $\overrightarrow{n_2} = (x_2, y_2, z_2)$

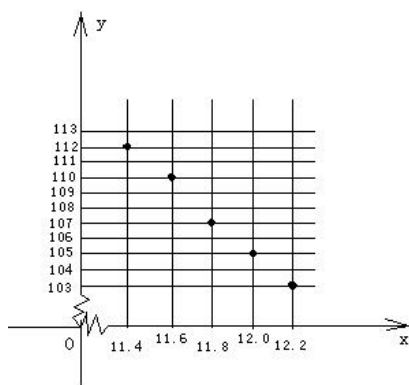
$$\text{则 } \begin{cases} \overrightarrow{n_2} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \\ \overrightarrow{n_2} \cdot \overrightarrow{BF} = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} (x_2, y_2, z_2) \cdot (1, 2, 0) = 0 \\ (x_2, y_2, z_2) \cdot (2-2\lambda, 0, 2\lambda) = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} x_2 + 2y_2 = 0 \\ (2-2\lambda)x_2 + 2\lambda z_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{取 } y_2 = -1, \text{ 则 } x_2 = 2, z_2 = \frac{2(\lambda-1)}{\lambda}, \therefore \overrightarrow{n_2} = (2, -1, \frac{2(\lambda-1)}{\lambda}) \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$\because$ 平面 $BDF \perp$ 平面 ADE , $\therefore \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \therefore (0,1,1) \cdot (2,-1,\frac{2(\lambda-1)}{\lambda}) = 0$,

$\therefore -1 + \frac{2(\lambda-1)}{\lambda} = 0$, 即 $\lambda = 2 \notin [0,1]$, 故不存在。12 分

19、解：(I)



.....2 分

(II) 对数据预处理如下

$x_1 = x - 11.8$	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4
$y_1 = y - 107$	5	3	0	-2	-4

则 $\overline{x_1} = 0$, $\overline{y_1} = 0.4$

$\therefore \hat{b} = \frac{(-0.4 \times 5) + (-0.2 \times 3) + 0 \times 0 + 0.2 \times (-2) + 0.4 \times (-4) - 5 \times 0 \times 0.4}{(-0.4)^2 + (-0.2)^2 + 0^2 + 0.2^2 + 0.4^2 - 5 \times 0^2} = -11.5 \dots 6'$

所以 $\hat{a} = \overline{y_1} - \hat{b} \cdot \overline{x_1} = 0.4 - (-11.5) \times 0 = 0.4$

$\therefore y_1$ 对 x_1 的回归的直线方程为 $y_1 = -11.5x_1 + 0.4$

$\therefore y - 107 = -11.5(x - 11.8) + 0.4$

即得 y 对 x 的回归的直线方程为

$y = -11.5x + 243.1$ 10 分

(III) 当 $x = 11.9$ 时, $y = 106.25$

即当价格定为11.9元时, 预测销售量大约是 106.25kg.....12 分

20、解：（I）当 $b=1$ 时， $F(\sqrt{3},0)$ 、 $B(0,1)$ 、 $C(-2,0)$ 设圆 P 的方程为：

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$\text{则有: } \begin{cases} 3 + \sqrt{3}D + F = 0 \\ 1 + E + F = 0 \\ 4 - 2D + F = 0 \end{cases} \quad \text{可得: } \begin{cases} D = 2 - \sqrt{3} \\ E = 2\sqrt{3} - 1 \\ F = -2\sqrt{3} \end{cases}$$

$\therefore$ 圆 P 的方程为： $x^2 + y^2 + (2 - \sqrt{3})x + (2\sqrt{3} - 1)y - 2\sqrt{3} = 0$ 4 分

（II）用反证法：假设直线 AB 与圆 P 相切，则切点为 B 。

设圆心 $P(\frac{c-a}{2}, n)$ ，则 $\overrightarrow{AB} = (-a, b)$, $\overrightarrow{PB} = (\frac{a-c}{2}, b-n)$ ，

$\overrightarrow{PC} = (-a - \frac{c-a}{2}, -n) = (-\frac{a+c}{2}, -n)$ $\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$ ，又有： $|\overrightarrow{PB}| = |\overrightarrow{PC}|$

$$\text{则 } \begin{cases} (-a, b) \cdot (\frac{a-c}{2}, b-n) = 0 \\ |(\frac{a-c}{2}, b-n)| = |(-\frac{a+c}{2}, -n)| \end{cases}, \text{消去 } n \text{ 可得: } c^2 - 4c = 0, \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$\therefore c = 0$ 或 $c = 4$ ，由题意易知 $0 < c < 4$ 。

$\therefore c = 0$ 或 $c = 4$ 与 $0 < c < 4$ 矛盾。假设不成立，原命题得证。

即直线 AB 与圆 P 不可能相切。.....12 分

21、解：（I） $\because a_{n+1} = \frac{(n+2)a_n^2 - na_n + n + 1}{a_n^2 + 1}$ 且 $a_1 = 1$

$$\therefore a_2 = \frac{3a_1^2 - 1 \cdot a_1 + 1 + 1}{a_1^2 + 1} = \frac{3 \times 1^2 - 1 \times 1 + 1 + 1}{1^2 + 1} = 2$$

$$a_3 = \frac{4a_2^2 - 2 \cdot a_2 + 2 + 1}{a_2^2 + 1} = \frac{4 \times 2^2 - 2 \times 2 + 2 + 1}{2^2 + 1} = 3$$

$$a_4 = \frac{5a_3^2 - 3 \cdot a_3 + 3 + 1}{a_3^2 + 1} = \frac{5 \times 3^2 - 3 \times 3 + 3 + 1}{3^2 + 1} = 4$$

猜测 $a_n = n$ 。2 分

下面用数学归纳法证明：

1) 当 $n=1,2,3,4$ 时, 命题成立。

2) 假设 $n=k(k \geq 1)$ 时, 命题成立。即 $a_k = k$, 则当 $n=k+1$ 时

$$a_{k+1} = \frac{(k+2)a_k^2 - ka_k + k+1}{a_k^2 + 1} = \frac{(k+2) \cdot k^2 - k^2 + k+1}{k^2 + 1} = \frac{k^3 + k^2 + k+1}{k^2 + 1} = k+1$$

综上, 由 1), 2) 可得, 对 $n \in N_+$ 都成立。

$\therefore a_n = n, n \in N_+$ 4 分

(II) 由 (I) 知: $b_n = 2^{n-1} + n - 1$

$$\therefore S_n = 2^n - 1 + \frac{n(n-1)}{2} \quad \therefore S_n - (n^2 + n) = 2^n - \frac{n^2 + 3n + 2}{2}$$

检验知: 当 $n=1,2,3$ 时, $2^n < \frac{n^2 + 3n + 2}{2}$, 即 $S_n < n^2 + n$

当 $n=4$ 时, $2^n > \frac{n^2 + 3n + 2}{2}$, 即 $S_n > n^2 + n$ 。猜想当 $n \geq 4$ 时, $2^n > \frac{n^2 + 3n + 2}{2}$

.....8 分

证法一: 当 $n \geq 4$ 时,

$$\begin{aligned} 2^n &= (1+1)^n > C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \\ &\geq 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n \times 3 \times 2}{6} = \frac{n^2 + 3n + 2}{2} \end{aligned}$$

综上得, 当 $n=1,2,3$ 时, $S_n < n^2 + n$;

当 $n \geq 4$ 时, $S_n > n^2 + n$ 。.....12 分

证法二: 1) 当 $n=4$ 时, $2^4 = 16 > \frac{4^2 + 3 \times 4 + 2}{2}$, $\therefore 2^n > \frac{n^2 + 3n + 2}{2}$ 成立。...6 分

2) 假设当 $n=k(k \geq 4)$ 时, 不等式成立, 即 $2^k > \frac{k^2 + 3k + 2}{2}$

则当 $n = k + 1$ 时, $2^{k+1} = 2 \times 2^k > 2 \times \frac{k^2 + 3k + 2}{2} = k^2 + 3k + 2$

$$\begin{aligned} \therefore k^2 + 3k + 2 - \frac{(k+1)^2 + 3(k+1) + 2}{2} &= \frac{2k^2 + 6k + 4 - k^2 - 2k - 1 - 3k - 3 - 2}{2} \\ &= \frac{k^2 + k - 2}{2} = \frac{(k+2)(k-1)}{2} > 0 \dots\dots\dots 8 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$\therefore 2^{k+1} > \frac{(k+1)^2 + 3(k+1) + 2}{2}, \text{ 即 } n = k + 1 \text{ 时, 猜想正确.} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

由 1), 2) 知当 $n \geq 4$ 时, $2^n > \frac{n^2 + 3n + 2}{2}$ 。

综上得, 当 $n = 1, 2, 3$ 时, $S_n < n^2 + n$; 当 $n \geq 4$ 时, $S_n > n^2 + n$ 。……12 分

选做题:

22、解: (I) 如图, 连接 OC ,

因为 $OA = OB, CA = CB$, 所以 $OC \perp AB$ 。

因为 OC 是圆的半径,

所以 AB 是圆的切线。……3 分

(II) 因为 ED 是直径,

所以 $\angle ECD = 90^\circ$, 所以 $\angle E + \angle EDC = 90^\circ$,

又 $\angle BCD + \angle OCD = 90^\circ, \angle OCD = \angle ODC$,

所以 $\angle BCD = \angle E$, 又因为 $\angle CBD = \angle EBC$,

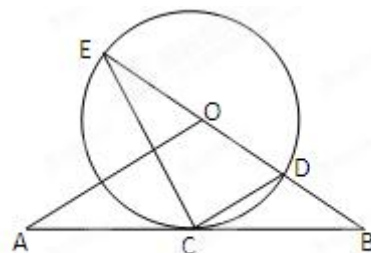
所以 $\triangle BCD \sim \triangle BEC$,

$$\text{所以 } \frac{BC}{BE} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow BC^2 = BD \cdot BE, \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\tan \angle CED = \frac{CD}{EC} = \frac{1}{2}, \triangle BCD \sim \triangle BEC,$$

$$\frac{BD}{BC} = \frac{CD}{EC} = \frac{1}{2} \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

设 $BD = x$, 则 $BC = 2x$, 因为 $BC^2 = BD \cdot BE$,



所以 $(2x)^2 = x(x+6)$, 所以 $BD = 2$ 9 分

所以 $OA = OB = BD + OD = 2 + 3 = 5$ 10 分

23、解：(I) 曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2 - 4x + y^2 = 0$

$$\text{将} \begin{cases} x = -2 + \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y = \frac{1}{2}t \end{cases} \text{代入上式并整理的} t^2 - 4\sqrt{3}t + 12 = 0$$

解得 $t = 2\sqrt{3}$ $\therefore$ 点 T 的坐标为 $(1, \sqrt{3})$

其极坐标为 $(2, \frac{\pi}{3})$ 5 分

(II) 由已知可得直线 l_1 与 x 轴不垂直, 设 l_1 的方程为 $y - \sqrt{3} = k(x - 1)$,

$$\text{即 } kx - y + \sqrt{3} - k = 0$$

由 (I) 得曲线 C 是以 $(2, 0)$ 为圆心, 2 为半径的圆,

$\therefore$ 直线 l_1 被曲线 C 截得的线段长为 2, $\therefore$ 圆心到直线 l_1 的距离为 $\sqrt{3}$

$$\therefore \frac{|\sqrt{3} + k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \sqrt{3}, \text{ 解得 } k = 0 \text{ 或 } k = \sqrt{3},$$

$\therefore$ 直线 l_1 的直角坐标方程为 $y = \sqrt{3}$ 或 $y = \sqrt{3}x$

其极坐标方程为 $\rho \cdot \sin \theta = \sqrt{3}$ 或 $\theta = \frac{\pi}{3} (\rho \in R)$ 10 分

24、解：(I) $\because |2x - a| + 2a \leq 6, \therefore |2x - a| \leq 6 - 2a, \therefore 2a - 6 \leq 2x - a \leq 6 - 2a$

$$\therefore \frac{3}{2}a - 3 \leq x \leq 3 - \frac{1}{2}a$$

又 $\because$ 不等式 $f(x) \leq 6$ 的解集为 $\{x | -6 \leq x \leq 4\}$

$$\text{所以} \begin{cases} \frac{3}{2}a - 3 = -6 \\ 3 - \frac{1}{2}a = 4 \end{cases} \quad \text{解得 } a = -2 \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

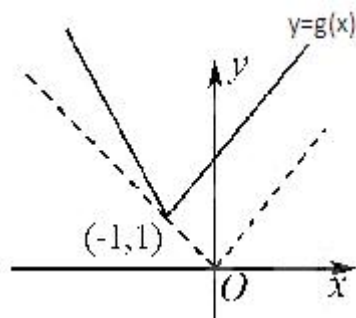
(II) 由 (I) 得 $f(x) = |2x + 2| - 4$ ，由不等式 $f(x) \leq (k^2 - 1)x - 5$ 得

$$|2x + 2| - 4 \leq (k^2 - 1)x - 5$$

$$\text{化简得 } |2x + 2| + 1 \leq (k^2 - 1)x$$

$$\text{令 } g(x) = |2x + 2| + 1 = \begin{cases} 2x + 3, & x \geq -1, \\ -2x - 1, & x < -1, \end{cases}$$

$y = g(x)$ 的图象如图所示



要使不等式 $f(x) \leq (k^2 - 1)x - 5$ 的解集非空

$$\text{只需 } k^2 - 1 > 2 \text{ 或 } k^2 - 1 \leq -1$$

$\therefore$ 实数 k 的取值范围是 $\{k \mid k < -\sqrt{3} \text{ 或 } k > \sqrt{3} \text{ 或 } k = 0\} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$