

2016—2017 学年第一学期统一检测题

高二数学（理科）

本试卷共 4 页，22 小题，满分 150 分. 考试用时 120 分钟.

注意事项：

1. 答卷前，考生务必用黑色字迹的钢笔或签字笔，将自己所在县（市、区）、姓名、试室号、座位号填写在答题卷上对应位置，再用 2B 铅笔在准考证号填涂区将考号涂黑.
2. 选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卷上对应题目的答案标号涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案，答案不能写在试卷或草稿纸上.
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卷各题目指定区域内相应的位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再在答题区内写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液. 不按以上要求作答的答案无效.

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，满分 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

(1) 命题 “ $\exists x > 0, \ln x > 0$ ” 的否定是

- (A) $\exists x > 0, \ln x > 0$ (B) $\forall x > 0, \ln x > 0$
(C) $\exists x > 0, \ln x \geq 0$ (D) $\forall x > 0, \ln x \leq 0$

(2) 过点 $C(2, -1)$ 且与直线 $x + y - 3 = 0$ 垂直的直线是

- (A) $x + y - 1 = 0$ (B) $x + y + 1 = 0$ (C) $x - y - 3 = 0$ (D) $x - y - 1 = 0$

(3) 双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的离心率是

- (A) $\frac{5}{4}$ (B) $\frac{5}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{7}}{4}$ (D) $\frac{25}{16}$

(4) 图 1 是一个组合体的三视图，根据图中数据，

可得该几何体的体积是

- (A) $\frac{38\pi}{3}$ (B) $\frac{19\pi}{3}$
(C) $\frac{13\pi}{3}$ (D) $\frac{11\pi}{3}$

(5) “ $x - 1 > 0$ ” 是 “ $x^2 - 1 > 0$ ” 的

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

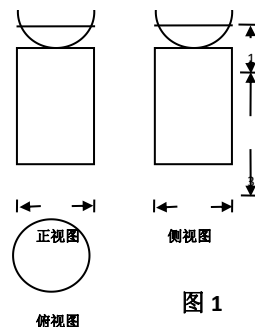


图 1

(C) 充要条件

(D) 既不充分也不必要条件

(6) 直线 $4x+3y+a=0$ 与圆 $(x-1)^2+(y-2)^2=9$ 相交于 A, B 两点, 且 $|AB|=4\sqrt{2}$,

则实数 a 的值是

(A) $a=-5$ 或 $a=-15$

(B) $a=-5$ 或 $a=15$

(C) $a=5$ 或 $a=-15$

(D) $a=5$ 或 $a=15$

(7) 如图 2, 将无盖正方体纸盒展开, 直线 AB, CD

在原正方体中的位置关系是

(A) 平行

(B) 相交成 60°

(C) 相交且垂直

(D) 异面直线

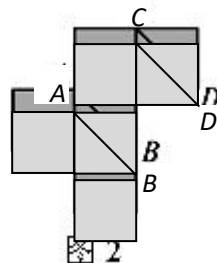


图 2

(8) 已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{m} = 1$ 过点 $B(0,4)$, 则此椭圆上任意一点到两焦点的距离的和是

(A) 4

(B) 8

(C) 12

(D) 16

(9) 一个几何体的三视图如图 3 所示 (单位: cm),

则该几何体的表面积是

(A) 4 cm^2

(B) $\frac{43}{2}\text{ cm}^2$

(C) 23 cm^2

(D) 24 cm^2

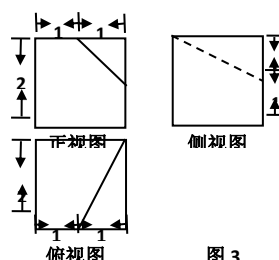


图 3

(10) 已知过点 $(-2,0)$ 的直线 l 与圆 $x^2+y^2-2x=0$ 有两个交点时, 其斜率 k 的取值范围是

(A) $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

(B) $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

(C) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

(D) $\left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$

(11) m, n 是空间两条不同直线, α, β 是两个不同平面. 有以下四个命题:

①若 $m \parallel \alpha, n \parallel \beta$ 且 $\alpha \parallel \beta$, 则 $m \parallel n$; ②若 $m \perp \alpha, n \perp \beta$ 且 $\alpha \perp \beta$, 则 $m \perp n$;

③若 $m \perp \alpha, n \parallel \beta$ 且 $\alpha \parallel \beta$, 则 $m \perp n$; ④若 $m \parallel \alpha, n \perp \beta$ 且 $\alpha \perp \beta$, 则 $m \parallel n$.

其中真命题的序号是

(A) ①②

(B) ②③

(C) ③④

(D) ①④

(12) 已知动直线 $y=k(x+1)$ 与椭圆 $C: x^2+3y^2=5$ 相交于 A, B 两点, 已知点

$M(-\frac{7}{3}, 0)$, 则 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ 的值是

- (A) $-\frac{9}{4}$ (B) $\frac{9}{4}$ (C) $-\frac{4}{9}$ (D) $\frac{4}{9}$

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，满分 20 分.

(13) 已知直线 $l_1: 3x - y + 2 = 0, l_2: x + my - 3 = 0$, 若 $l_1 \parallel l_2$, 则 m 的值等于 ▲.

(14) 如图 4, 在圆 $x^2 + y^2 = 16$ 上任取一点 P , 过点 P 作 x 轴的垂线段 PD , D 为垂足, 当点 P 在圆上运动时, 则线段 PD 的中点 M 的轨迹方程为 ▲.

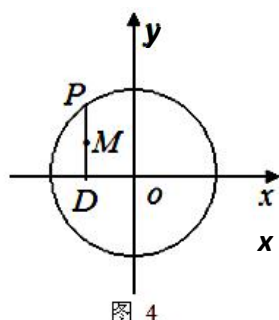


图 4

图 4



图 5

俯视图

(15) 某四面体的三视图如图 5 所示, 则此四面体的四个面中面积最大的面的面积等于 ▲.

(16) 有一球内接圆锥, 底面圆周和顶点均在球面上, 其底面积为 4π , 已知球的半径 $R = 3$, 则此圆锥的体积为 ▲.

三、解答题：本大题共 6 小题，满分 70 分. 解答须写出文字说明、证明过程和演算步骤.

(17) (本小题满分 11 分)

已知斜率 $k = \frac{1}{2}$ 且过点 $A(7, 1)$ 的直线 l_1 与直线 $l_2: x + 2y + 3 = 0$ 相交于点 M .

(I) 求以点 M 为圆心且过点 $B(4, -2)$ 的圆的标准方程 C ;

(II) 求过点 $N(4, 2)$ 且与圆 C 相切的直线方程.

(18) (本小题满分 11 分)

如图 6, 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, E, F, G, H

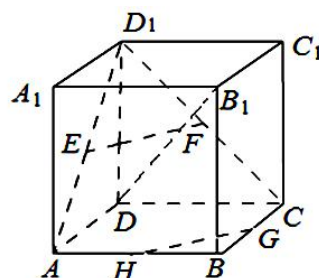


图 6

分别是 AD_1 、 CD_1 、 BC 、 AB 的中点.

(I) 求证: E, F, G, H 四点共面;

(II) 求证: $GH \perp B_1D$.

(19) (本小题满分 12 分)

已知 F_1, F_2 分别是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{9} = 1 (a > 0)$ 的左右焦点, 点 P 是双曲线上任一点,

且 $||PF_1| - |PF_2|| = 2$, 顶点在原点且以双曲线的右顶点为焦点的抛物线为 L .

(I) 求双曲线 C 的渐近线方程和抛物线 L 的标准方程;

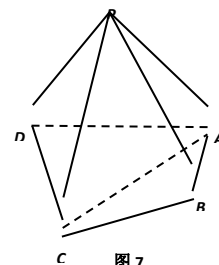
(II) 过抛物线 L 的准线与 x 轴的交点作直线, 交抛物线于 M, N 两点, 问直线的斜率等于多少时, 以线段 MN 为直径的圆经过抛物线 L 的焦点?

(20) (本小题满分 12 分)

如图 7, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, $\triangle ADP$ 是等腰直角三角形, $\angle APD$ 是直角, $AB \perp AD, AB = 1, AD = 2, AC = CD = \sqrt{5}$.

(I) 求直线 PB 与平面 PCD 所成角的正弦值;

(II) 求平面 PCD 与平面 PAB 所成二面角的平面角的余弦值.



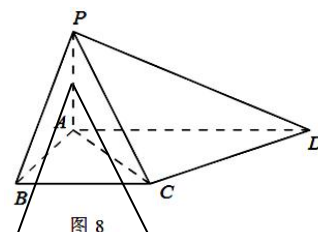
(21) (本小题满分 12 分)

如图 8, 直角梯形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$, $AB = BC$ 且 $\triangle ABC$ 的面积等于 $\triangle ADC$ 面积的 $\frac{1}{2}$. 梯形 $ABCD$ 所在平面外有一点 P , 满足 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $PA = AB$.

(I) 求证: 平面 $PCD \perp$ 平面 PAC ;

(II) 侧棱 PA 上是否存在点 E , 使得 $BE \parallel$ 平面 PCD ?

若存在, 指出点 E 的位置并证明; 若不存在, 请说明理由;



(22) (本小题满分 12 分)

已知椭圆 G 的中心在平面直角坐标系的原点，离心率 $e = \frac{1}{2}$ ，右焦点与圆 $C: x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ 的圆心重合.

(I) 求椭圆 G 的方程;

(II) 设 F_1 、 F_2 是椭圆 G 的左焦点和右焦点，过 F_2 的直线 $l: x = my + 1$ 与椭圆 G 相交于 A 、 B 两点，请问 $\triangle ABF_1$ 的内切圆 M 的面积是否存在最大值？若存在，求出这个最大值及直线 l 的方程，若不存在，请说明理由.

2016—2017 学年第一学期统一检测题
高二数学（理科）参考答案及评分标准

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	C	A	D	A	A	B	B	C	C	B	D

(12) 解析: 将 $y = k(x+1)$ 代入 $x^2 + 3y^2 = 5$ 中得 $(1+3k^2)x^2 + 6k^2x + 3k^2 - 5 = 0$

$$\therefore \Delta = 36k^4 - 4(3k^2 + 1)(3k^2 - 5) = 48k^2 + 20 > 0,$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{6k^2}{3k^2 + 1}, \quad x_1 x_2 = \frac{3k^2 - 5}{3k^2 + 1}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (x_1 + \frac{7}{3}, y_1)(x_2 + \frac{7}{3}, y_2) = (x_1 + \frac{7}{3})(x_2 + \frac{7}{3}) + y_1 y_2 \\ &= (x_1 + \frac{7}{3})(x_2 + \frac{7}{3}) + k^2(x_1 + 1)(x_2 + 1) \\ &= (1 + k^2)x_1 x_2 + (\frac{7}{3} + k^2)(x_1 + x_2) + \frac{49}{9} + k^2 \\ &= (1 + k^2)\frac{3k^2 - 5}{3k^2 + 1} + (\frac{7}{3} + k^2)(-\frac{6k^2}{3k^2 + 1}) + \frac{49}{9} + k^2 \\ &= \frac{-3k^4 - 16k^2 - 5}{3k^2 + 1} + \frac{49}{9} + k^2 = \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

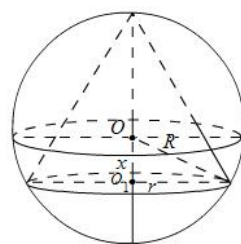
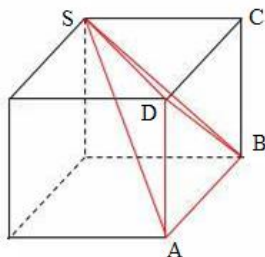
二、填空题

(13) $-\frac{1}{3}$ (14) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ (15) $2\sqrt{3}$

(16) $\frac{4(3-\sqrt{5})\pi}{3}$ 或 $\frac{4(3+\sqrt{5})\pi}{3}$ (答 1 个得 3 分, 答 2 个得 5 分)

(15) 解析: 由三视图知该几何体为棱锥 S - ABD, 其中 $SC \perp$ 平面 ABCD; 四面体 S - ABD 的四个面中 SBD 面的面积最大, 三角形 SBD 是边长为 $2\sqrt{2}$ 的等边三角形, 所以此四面体的四个面中面积最大的为

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times 8 = 2\sqrt{3}.$$



(16) 解析: 由 $\pi r^2 = 4\pi$ 得圆锥底面半径为 $r = 2$, 如图设 $OO_1 = x$,

则 $x = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$, 圆锥的高 $h = R + x = 3 + \sqrt{5}$ 或 $h = R - x = 3 - \sqrt{5}$

所以, 圆锥的体积为 $V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times 4\pi \times (3 + \sqrt{5}) = \frac{4(3 + \sqrt{5})\pi}{3}$

或 $V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times 4\pi \times (3 - \sqrt{5}) = \frac{4(3 - \sqrt{5})\pi}{3}$

三、解答题

(17) (本小题满分 11 分)

解: (I) 依题意得, 直线 l_1 的方程为 $y - 1 = \frac{1}{2}(x - 7)$, 即 $x - 2y - 5 = 0$. (2 分)

由 $\begin{cases} x + 2y + 3 = 0 \\ x - 2y - 5 = 0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$. 即点 M 的坐标为 $M(1, -2)$. (4 分)

设圆 C 的半径为 r , 则 $r^2 = |BM|^2 = (4 - 1)^2 + (-2 + 2)^2 = 9$. (5 分)

所以, 圆 C 的标准方程为 $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$. (6 分)

(II) ①因为圆 C 过点 $B(4, -2)$, 所以直线 $x = 4$ 为过点 $N(4, 2)$ 且与圆 C 相切的直线.

(8 分)

②设过点 $N(4, 2)$ 且与圆 C 相切的直线方程的斜率为 k_1 ,

则直线方程为 $k_1x - y + 2 - 4k_1 = 0$. (9 分)

由 $\frac{|k_1 + 2 + 2 - 4k_1|}{\sqrt{k_1^2 + 1}} = 3$, 得 $k_1 = \frac{7}{24}$, 即 $7x - 24y + 20 = 0$ 是圆 C 的一条切线方程.

(10 分)

综上, 过点 $N(4,2)$ 且与圆 $C: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ 相切的直线方程为 $7x - 24y + 20 = 0$ 和

$$x = 4.$$

(11 分)

(18) (本小题满分 11 分)

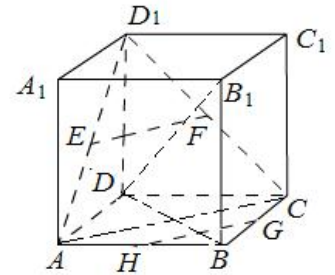
证明: (I) 如图, 连结 AC . (1 分)

$\because E, F$ 分别是 AD_1 、 CD_1 的中点, $\therefore EF \parallel AC$. (2 分)

$\because G, H$ 分别是 BC 、 AB 的中点, $\therefore GH \parallel AC$. (3 分)

$\therefore EF \parallel GH$. (4 分)

$\therefore E, F, G, H$ 四点共面。 (5 分)



(II) 连结 BD .

$\because ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 是正方体, $\therefore AC \perp BD, AC \perp DD_1$. (7 分)

$\because BD \cap DD_1 = D$, $BD, DD_1 \subset$ 平面 BDD_1B_1 , $\therefore AC \perp$ 平面 BDD_1B_1 . (9 分)

又 $\because GH \parallel AC$, $\therefore GH \perp$ 平面 BDD_1B_1 , (10 分)

又 $\because BD_1 \subset$ 平面 BDD_1B_1 , $\therefore GH \perp BD_1$. (11 分)

(19) (本小题满分 12 分)

解: (I) 由双曲线的定义可知, $2a = 2$, 即 $a = 1$. (1 分)

$\therefore$ 双曲线的标准方程为 $x^2 - \frac{y^2}{9} = 1$. (2 分)

$\therefore$ 双曲线的渐近线方程 $y = \pm 3x$. (3 分)

双曲线的右顶点坐标为 $A(1,0)$, 即抛物线 L 的焦点坐标为 $A(1,0)$,

$\therefore$ 抛物线 L 的标准方程为 $y^2 = 4x$, (5 分)

(II) 抛物线 $y^2 = 4x$ 的准线与对称轴的交点为 $(-1,0)$. (6 分)

设直线 MN 的斜率为 k , 则其方程为 $y = k(x+1)$.

(7 分)

$$\text{由 } \begin{cases} y = k(x+1) \\ y^2 = 4x \end{cases}, \text{ 得 } k^2 x^2 + 2(k^2 - 2)x + k^2 = 0.$$

$\because$ 直线 MN 与抛物线交于 M 、 N 两点,

$$\therefore \Delta = 4(k^2 - 2)^2 - 4k^4 > 0, \text{ 解得 } -1 < k < 1.$$

(8 分)

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 抛物线焦点为 $F(1, 0)$,

$\because$ 以线段 MN 为直径的圆经过抛物线焦点, $\therefore MF \perp NF$.

(9 分)

$$\therefore \frac{y_1}{x_1 - 1} \cdot \frac{y_2}{x_2 - 1} = -1, \text{ 即 } y_1 y_2 + x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 = 0.$$

(10 分)

$$\text{又 } x_1 + x_2 = -\frac{2(k^2 - 2)}{k^2}, \quad x_1 x_2 = 1, \quad y_1^2 y_2^2 = 4x_1 \cdot 4x_2 = 16 \text{ 且 } y_1, y_2 \text{ 同号},$$

$$\therefore \frac{2(k^2 - 2)}{k^2} = -6. \text{ 解得 } k^2 = \frac{1}{2}, \therefore k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(11 分)

即直线的斜率等于 $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 以线段 MN 为直径的圆经过抛物线的焦点. (12 分)

(20) (本小题满分 12 分)

解: 取 AD 的中点 O , 连结 OP , OC ,

$\because \triangle ADP$ 是等腰直角三角形, $\angle APD$ 是直角, $\therefore PO \perp AD$.

$\because$ 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, $\therefore PO \perp$ 平面 $ABCD$.

$\therefore PO \perp OA$, $PO \perp OC$, 又 $\because AC = CD$, $\therefore OC \perp AD$.

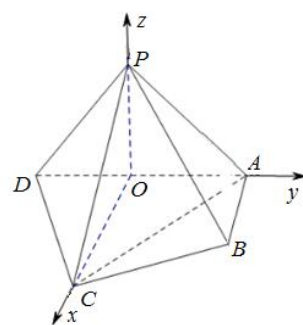
即 OC, AD, PO 两两垂直.

(2 分)

以 O 为原点, 建立如图所示的空间直角坐标系.

$$\text{由条件知, } OC = \sqrt{AC^2 - AO^2} = \sqrt{\sqrt{5}^2 - 1} = 2, \quad PO = 1.$$

故 O, A, B, C, D, P 各点的坐标分别为: $O(0, 0, 0), A(0, 1, 0), B(1, 1, 0), C(2, 0, 0)$,



$D(0, -1, 0), P(0, 0, 1)$, 所以, $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 0), \overrightarrow{AP} = (0, -1, 1), \overrightarrow{PB} = (1, 1, -1), \overrightarrow{DC} = (2, 1, 0), \overrightarrow{DP} = (0, 1, 1)$. (4 分)

(I) 设平面 PCD 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DP} = 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$

令 $x = 1$, 则 $y = -2, z = 2$, 故 $\mathbf{n} = (1, -2, 2)$ 是平面 PCD 的一个法向量. (6 分)

设直线 PB 与平面 PCD 所成角为 θ_1 , 则

$$\sin \theta_1 = |\cos \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{PB} \rangle| = \left| \frac{\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PB}}{|\mathbf{n}| \cdot |\overrightarrow{PB}|} \right| = \left| \frac{1 - 2 - 2}{\sqrt{9} \times \sqrt{3}} \right| = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 即直线 } PB \text{ 与平面 } PCD \text{ 所成角的正}$$

$$\text{弦值为 } \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad (8 \text{ 分})$$

(II) 设平面 PAB 的法向量为 $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1)$, 则 $\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} x_1 = 0 \\ -y_1 + z_1 = 0 \end{cases}$.

令 $y_1 = 1$, 则 $z_1 = 1$, 故 $\mathbf{m} = (0, 1, 1)$ 是平面 PAB 的一个法向量. (10 分)

$$\text{设平面 } PCD \text{ 与平面 } PAB \text{ 所成角的二面角的平面角为 } \theta_2, \text{ 则 } \cos \theta_2 = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}}{|\mathbf{n}| \cdot |\mathbf{m}|} = \frac{0 - 2 + 2}{\sqrt{9} \times \sqrt{2}} = 0,$$

所以平面 PCD 与平面 PAB 所成二面角的平面角的余弦值 0. (12 分)

(21) (本小题满分 12 分)

证明: (I) $\because PA \perp$ 平面 $ABCD$, $\therefore CD \perp PA$. (1 分)

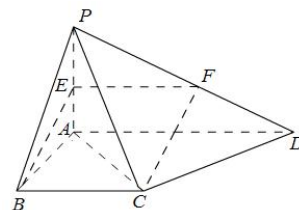
又 $\triangle ABC$ 的面积等于 $\triangle ADC$ 面积的 $\frac{1}{2}$,

$$\therefore AB = BC = \frac{1}{2} AD. \quad (2 \text{ 分})$$

在底面 $ABCD$ 中, $\because \angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$, $AB = BC = \frac{1}{2} AD$,

$$\therefore AC = CD = \frac{\sqrt{2}}{2} AD, \therefore AC \perp CD. \quad (4 \text{ 分})$$

又 $\because PA \cap AC = A$, $\therefore CD \perp$ 平面 PAC . (5 分)



$$\text{则 } S_{\triangle ABF_1} = \frac{1}{2}|F_1F_2| \cdot |y_1| + \frac{1}{2}|F_1F_2| \cdot |y_2| = y_1 - y_2. \quad (6 \text{ 分})$$

$$\text{由 } \begin{cases} x = my + 1 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}, \text{ 得 } (3m^2 + 4)y^2 + 6my - 9 = 0,$$

$$\text{解得 } y_1 = \frac{-3m + 6\sqrt{m^2 + 1}}{3m^2 + 4}, y_2 = \frac{-3m - 6\sqrt{m^2 + 1}}{3m^2 + 4}. \quad (7 \text{ 分})$$

$$\therefore S_{\triangle ABF_1} = \frac{12\sqrt{m^2 + 1}}{3m^2 + 4}. \quad (8 \text{ 分})$$

$$\text{令 } t = \sqrt{m^2 + 1}, \text{ 则 } t \geq 1, \text{ 且 } m^2 = t^2 - 1,$$

$$\text{有 } S_{\triangle ABF_1} = \frac{12t}{3(t^2 - 1) + 4} = \frac{12t}{3t^2 + 1} = \frac{12}{3t + \frac{1}{t}}. \quad (9 \text{ 分})$$

$$\text{令 } f(t) = 3t + \frac{1}{t}, \text{ 因为 } f(t) \text{ 在 } [1, +\infty) \text{ 上单调递增, 有 } f(t) \geq f(1) = 4. \quad (10 \text{ 分})$$

$$\therefore S_{\triangle ABF_1} \leq \frac{12}{4} = 3. \text{ 即当 } t = 1, m = 0 \text{ 时, } 4r \text{ 有最大值 } 3, \text{ 得 } r_{\max} = \frac{3}{4}, \text{ 这时所求内切圆}$$

的面积为 $\frac{9}{16}\pi$. (11

分)

$$\therefore \text{存在直线 } l: x = 1, \triangle ABF_1 \text{ 的内切圆 } M \text{ 的面积最大值为 } \frac{9}{16}\pi. \quad (12 \text{ 分})$$