

2015—2016 学年度上学期期末考试高三年级

数学文科试卷

(本试卷满分 150 分, 考试时间为 120 分钟)

一、选择题(本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分, 在每小题给出的四个选项中只有一项是符合题目要求的)

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x | \log_x 4 = 2\}$, 则 $A \cup B =$

A. $\{-2, 1, 2\}$ B. $\{1, 2\}$ C. $\{-2, 2\}$ D. $\{2\}$

2. 若复数 $z = (a^2 + 2a - 3) + (a + 3)i$ 为纯虚数(i 为虚数单位), 则实数 a 的值是

A. -3 B. -3 或 1 C. 3 或 -1 D. 1

3. 已知向量 $\vec{a} = (1, 3)$, $\vec{b} = (-2, m)$, 若 $\vec{a}$ 与 $\vec{a} + 2\vec{b}$ 垂直, 则 m 的值为

A. 1 B. -1 C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

4. 直线 $x + (a^2 + 1)y + 1 = 0$ 的倾斜角的取值范围是

A. $[0, \frac{\pi}{4}]$ B. $[\frac{3\pi}{4}, \pi)$ C. $[0, \frac{\pi}{4}] \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$ D. $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \cup [\frac{3\pi}{4}, \pi)$

5. 已知 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, 且 $\cos(\alpha + \frac{\pi}{3}) = -\frac{3}{5}$, 则 $\sin \alpha$ 的值为

A. $\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$ B. $\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$ C. $\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$ D. $\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$

6. 若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = (-1)^n(3n-2)$,

则 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} =$

A. 15 B. 12 C. -12 D. -15

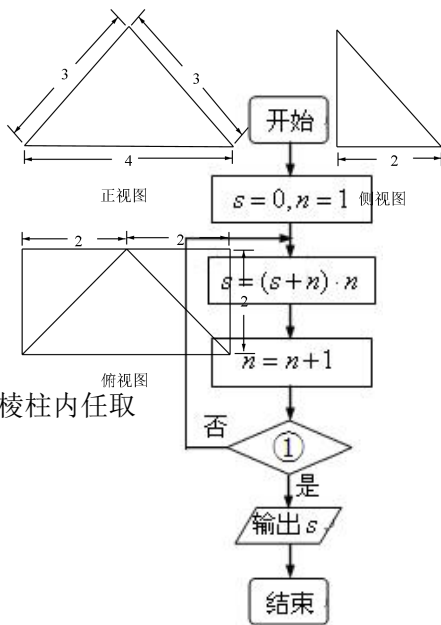
7. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的三视图如图所示,

则四棱锥 $P-ABCD$ 的四个侧面中面积最大的值是

A. 3 B. $2\sqrt{5}$

C. 6 D. 8

8. 已知斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 V , 在斜三棱柱内任取



一点 P ，则三棱锥 $P-ABC$ 的体积大于 $\frac{V}{5}$ 的概率为

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

9. 如图是某算法的程序框图，若程序运行后输出

的结果是 27，则判断框①处应填入的条件是

- A. $n > 2$ B. $n > 3$ C. $n > 4$ D. $n > 5$

10. 设双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，过 F_1 的直线

交双曲线左支于 A, B 两点，则 $|BF_2| + |AF_2|$ 的最小值为

- A. $\frac{19}{2}$ B. 11 C. 12 D. 16

11. 已知函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, $g(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{4x}, & x > 0 \\ -x^2 - 6x - 8, & x \leq 0 \end{cases}$,

则方程 $g[f(x)] - 1 = 0$ 的根的个数为

- A. 3 个 B. 4 个 C. 5 个 D. 6 个

12. 已知球 O 半径为 $\sqrt{5}$ ，设 S, A, B, C 是球面上四个点，其中 $\angle ABC = 120^\circ$ ，

$AB = BC = 2$ ，平面 $SAC \perp$ 平面 ABC ，则棱锥 $S-ABC$ 的体积的最大值为

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $3\sqrt{3}$

二、填空题(本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分)

13. 将容量为 n 的样本中的数据分成 5 组，绘制频率分布直方图. 若第 1 至第 5 个长方形的面积之比 $3:4:5:2:1$ ，且最后两组数据的频数之和等于 15，则 n 等于_____.

14. 设 $a > 0, b > 0$ ，若 $\sqrt{3}$ 是 3^a 与 3^b 的等比中项，则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值是_____.

15. 已知函数 $f(x) = (2x - x^2)e^x$ ，则函数 $f(x)$ 的极大值与极小值之积为_____.

16. 设 $[m]$ 表示不超过实数 m 的最大整数，则在直角坐标平面 xOy 上，满足 $[x]^2 + [y]^2 = 50$ 的点 $P(x, y)$ 所形成的图形的面积为_____.

三、解答题：本大题共 6 小题，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \cos^2 x - \frac{1}{2} (x \in R)$.

(I) 当 $x \in [-\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}]$ 时, 求函数 $f(x)$ 的最小值和最大值;

(II) 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对应边分别为 a, b, c , 且 $c = \sqrt{3}$, $f(C) = 0$, 若向量 $\vec{m} = (1, \sin A)$ 与向量 $\vec{n} = (2, \sin B)$ 共线, 求 a, b 的值.

18. (本小题满分 12 分) 为积极配合沈阳首届马拉松比赛志愿者招募工作, 某校拟成立由 4 名同学组成的志愿者招募宣传队, 经过初步选定, 2 名男同学, 4 名女同学共 6 名同学成为候选人, 每位候选人当选宣传队队员的机会是相同的.

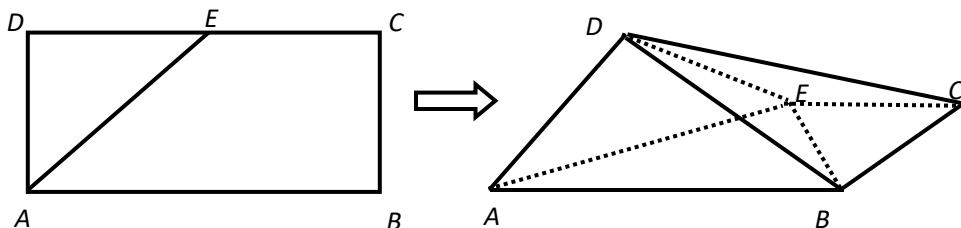
(I) 求当选的 4 名同学中恰有 1 名男同学的概率;

(II) 求当选的 4 名同学中至少有 3 名女同学的概率.

19. (本小题满分 12 分) 如图, 在长方形 $ABCD$ 中, $AB = 2$, $AD = 1$, E 为 DC 的中点, 现将 $\triangle DAE$ 沿 AE 折起, 使平面 $DAE \perp$ 平面 $ABCE$, 连 DB, DC, BE .

(I) 求证: $BE \perp$ 平面 ADE ;

(II) 求点 A 到平面 BDE 的距离.



20. (本小题满分 12 分) 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $M(\sqrt{2}, 1)$, 且焦点为 $F_1(-\sqrt{2}, 0)$.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 当过点 $P(4, 0)$ 的动直线 l 与椭圆 C 相交于两不同点 A, B 时, 在线段 AB 上

取点 Q , 满足 $\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|} = \frac{|\overrightarrow{AQ}|}{|\overrightarrow{QB}|}$, 证明: 点 Q 总在某定直线上.

21. (本小题满分 12 分) 设函数 $f(x) = \frac{a}{x} + \ln x$, $g(x) = x^3 - x^2 - 3$, 其中 $a \in R$.

(I) 当 $a = 2$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(1, f(1))$ 处的切线方程;

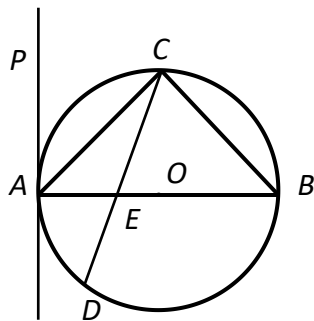
(II) 若存在 $x \in [0, 2]$, 使得 $g(x) \geq M$ 成立, 求实数 M 的最大值;

(III) 若对任意 $s, t \in [\frac{1}{2}, 2]$ 都有 $f(s) \geq g(t)$, 求 a 的取值范围.

选做题 (请考生从 22、23、24 三题中任选一题做答, 如果多做, 则按所做的第一题记分)

22. (本小题满分 10 分) 选修 4—1: 几何证明选讲

如图, $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, AB 是 $\odot O$ 的直径, PA 是过点 A 的直线, 且 $\angle PAC = \angle ABC$.



(I) 求证: PA 是 $\odot O$ 的切线;

(II) 如果弦 CD 交 AB 于点 E , $AC = 8$,

$CE : ED = 6 : 5$, $AE : EB = 2 : 3$, 求 $\sin \angle BCE$.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4—4: 坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中, 以 O 为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的

极坐标方程为 $\rho \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 圆 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} + r \cos \theta \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2} + r \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数, $r > 0$).

(I) 求圆心的一个极坐标;

(II) 当 r 为何值时, 圆 C 上的点到直线 l 的最大距离为 3.

24. (本小题满分 10 分) 选修 4—5: 不等式选讲

设函数 $f(x) = |2x - 1| + |2x - 3|$ ($x \in R$).

(I) 解不等式 $f(x) \leq 5$;

(II) 若 $g(x) = \frac{1}{f(x) + m}$ 的定义域为 R , 求实数 m 的取值范围.