

数学试题参考答案及评分标准（文科）

一、选择题

1. A 2. C 3. C 4. B 5. C 6. B 7. B 8. A 9. D 10. D 11. D 12. C

二、填空题

13. 48 14. 24 15. 9 16. 97

三、解答题

17. 由已知得 $\begin{cases} 0 \leq x \leq 8 \\ 0 \leq x-2 \leq 8 \end{cases} \quad \therefore 2 \leq x \leq 8 \quad \text{①} \cdots \cdots 2 \text{ 分}$

原不等式化为 $\frac{8!}{(8-x)!} < 6 \times \frac{8!}{(10-x)!} \cdots \cdots 4 \text{ 分}$

$\therefore 1 < \frac{6}{(10-x)(9-x)} \quad \text{即} \quad x^2 - 19x + 84 < 0 \cdots \cdots 6 \text{ 分}$

解得 $7 < x < 12 \quad \text{②} \cdots \cdots 8 \text{ 分}$

由①②知 $7 < x \leq 8 \cdots \cdots 10 \text{ 分}$

又 $\because x \in N \quad \therefore \text{原不等式的解集为 } \{8\}. \cdots \cdots 12 \text{ 分}$

18. (1) $P_3(3) = 0.6^3 = 0.216 \quad \cdots \cdots 4 \text{ 分}$

(2) $P_3(1) = C_3^1 0.6 \times 0.4^2 = 0.288. \quad \cdots \cdots 8 \text{ 分}$

(3) $P_3(1) + P_3(2) + P_3(3) = 1 - P_3(0) = 1 - 0.4^3 = 0.936. \quad \cdots \cdots 12 \text{ 分}$

19. (1) 由已知得

$$\begin{cases} 2^n = 1024 \\ 1 + C_n^1 p + C_n^2 p^2 = 201 \end{cases}, \quad \text{解得 } n=10, p = -\frac{20}{9} \text{ (舍去) 或 } p=2,$$

$\therefore n=10, p=2. \quad \cdots \cdots 4 \text{ 分}$

(2) 设 $(1+2x)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{10}x^{10}$

令 $x=1$ 得 $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 3^{10}$ ①

令 $x=-1$ 得 $a_0 - a_1 + a_2 - \cdots - a_{10} = 1$ ②

((①--②) / 2 得 $a_1 + a_3 + \cdots + a_9 = \frac{3^{10}-1}{2} = 29524$ 。.....8 分

(3) 设 $(1+2x)^{10}$ 展开式中系数最大的项为 T_{r+1} , 则 $T_{r+1} = C_{10}^r (2x)^r$ 的系数为 $C_{10}^r 2^r$

则 $\begin{cases} C_{10}^r \cdot 2^r \geq C_{10}^{r-1} \cdot 2^{r-1} \\ C_{10}^r \cdot 2^r \geq C_{10}^{r+1} \cdot 2^{r+1} \end{cases}$ 解得 $\frac{19}{3} \leq r \leq \frac{22}{3}$

又 $\because r \in N$, $\therefore r = 7$,

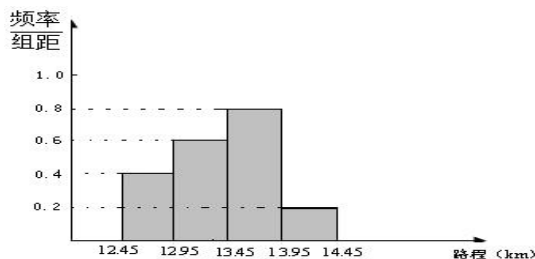
因此, 展开式中系数最大的项为 $T_8 = C_{10}^7 (2x)^7 = 15360x^7$ 。.....12 分

20. (1) 频率分布表:

分组	频数	频率
[12.45, 12.95)	2	0.2
[12.95, 13.45)	3	0.3
[13.45, 13.95)	4	0.4
[13.95, 14.45)	1	0.1
合计	10	1.0

.....3 分

(2) 频率直方图:



.....6 分

组距为 0.5, 故估计总体数据落在 $[12.95, 13.95)$ 中的概率为 $0.3+0.4=0.7$ 。

.....9 分

(3) $\bar{x} = \frac{13.7+12.7+\cdots+13.4}{10} = 13.4$, 由此估计总体的平均值为 13.4。

.....12 分

21. (1) 不妨设甲先掷, 设 A_k 表示事件“甲在自己第 k 次投掷获胜”,

设 B_k 表示事件“乙在自己第 k 次投掷获胜”, A 表示事件“甲整个比赛获胜”,

$$\begin{aligned}
 P(A) &= P(A_1 + \bar{A}_1 \cdot \bar{B}_1 \cdot A_2 + \bar{A}_1 \cdot \bar{B}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{B}_2 \cdot A_3 + \cdots + \bar{A}_1 \cdot \bar{B}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{B}_2 \cdots \bar{A}_{n-1} \cdot \bar{B}_{n-1} \cdot A_n) \\
 &= P(A_1) + P(\bar{A}_1 \cdot \bar{B}_1 \cdot A_2) + P(\bar{A}_1 \cdot \bar{B}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{B}_2 \cdot A_3) + \cdots + P(\bar{A}_1 \cdot \bar{B}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{B}_2 \cdots \bar{A}_{n-1} \cdot \bar{B}_{n-1} \cdot A_n) \\
 &= \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \cdots + \left(\frac{5}{6}\right)^{2(n-1)} \cdot \frac{1}{6} \quad \cdots \cdots 3 \text{ 分} \\
 &= \frac{1}{6} \left[\frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{2n}}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2} \right] = \frac{6 \cdot [1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{2n}]}{11} \quad (n \in N_+). \quad \cdots \cdots 4 \text{ 分}
 \end{aligned}$$

易知事件“双方和局”可以表示为:

$$B = \bar{A}_1 \cdot \bar{B}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{B}_2 \cdots \bar{A}_n \cdot \bar{B}_n, \text{ 其概率为 } P(B) = \left(\frac{5}{6}\right)^{2n} \quad (n \in N_+).$$

$$\text{即先掷者获胜概率为 } \frac{6 \cdot [1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{2n}]}{11}, \text{ 双方和局概率为 } \left(\frac{5}{6}\right)^{2n} \quad (n \in N_+). \quad \cdots \cdots 6 \text{ 分}$$

(上述每一步需要的事件独立性或互斥性显然, 说明略)

(2) 设 R 表示事件: “后掷者最大点数恰好为 5”,

S_5 表示事件: “后掷者最大点数不超过 5”, S_4 表示事件: “后掷者最大点数不超过 4”,

则 R 即 “双方和局”, S_4 即 “先掷者获胜”, 且 $R + S_4 = S_5$, R 与 S_4 是互斥事件,

$$\text{故 } P(S_5) = P(R) + P(S_4), \quad \cdots \cdots 8 \text{ 分}$$

$$\text{易知: } P(S_4) = \frac{4^n}{6^n} = \frac{2^n}{3^n}, \quad \cdots \cdots 10 \text{ 分}$$

$$\text{故 } P(R) = P(S_5) - P(S_4) = \frac{5^n}{6^n} - \frac{4^n}{6^n} = \frac{5^n - 4^n}{6^n} \quad (n \in N_+).$$

$$\text{即先掷者获胜概率为 } \frac{2^n}{3^n}, \text{ 双方和局概率为 } \frac{5^n - 4^n}{6^n} \quad (n \in N_+). \quad \cdots \cdots 12 \text{ 分}$$

22. 假设存在等差数列 $\{a_n\}$ 满足题意，则取 n 分别等于 1、2、3、4 得：

$$\begin{cases} C_1^0 + \frac{C_1^1}{a_1} = \frac{2^{1+1}-1}{1+1} \\ C_2^0 + \frac{C_2^1}{a_1} + \frac{C_2^2}{a_2} = \frac{2^{2+1}-1}{2+1} \\ C_3^0 + \frac{C_3^1}{a_1} + \frac{C_3^2}{a_2} + \frac{C_3^3}{a_3} = \frac{2^{3+1}-1}{3+1} \\ C_4^0 + \frac{C_4^1}{a_1} + \frac{C_4^2}{a_2} + \frac{C_4^3}{a_3} + \frac{C_4^4}{a_4} = \frac{2^{4+1}-1}{4+1} \end{cases} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

求得 $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 4, a_4 = 5, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

猜想 $a_n = n+1, (n \in N_+)$ 。 $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

下面证明： $\because C_{n+1}^{k+1} = \frac{n+1}{k+1} C_n^k, \quad \therefore \frac{C_n^k}{k+1} = \frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}, \text{ 即 } \therefore \frac{C_n^k}{a_k} = \frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}。$

$\therefore$ 等式左边

$$\begin{aligned} &= C_n^0 + \frac{C_{n+1}^2}{n+1} + \frac{C_{n+1}^3}{n+1} + \dots + \frac{C_{n+1}^{n+1}}{n+1} = C_n^0 + \frac{1}{n+1} (C_{n+1}^2 + C_{n+1}^3 + \dots + C_{n+1}^{n+1}) \\ &= C_n^0 + \frac{1}{n+1} [(C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + C_{n+1}^3 + \dots + C_{n+1}^{n+1}) - C_{n+1}^0 - C_{n+1}^1] \\ &= 1 + \frac{1}{n+1} [2^{n+1} - 1 - (n+1)] = \frac{2^{n+1}-1}{n+1} = \text{右边}。 \dots\dots\dots 12 \text{ 分} \end{aligned}$$

因此，存在等差数列 $a_n = n+1, (n \in N_+)$ 满足题意。 $\dots\dots\dots 14 \text{ 分}$

(省略猜想步骤，只要存在性的构造和推理正确亦可)