

高考复习一周期数列的通项公式解析教案

【累加法】(型如 $a_{n+1} = a_n + f(n)$ 的递推关系)

简析: 已知 $a_1 = a$, $a_{n+1} - a_n = f(n)$, 其中 $f(n)$ 可以是关于 n 的一次、二次函数、

指数函数、分式函数, 求通项 a_n .

①若 $f(n)$ 是关于 n 的一次函数, 累加后可转化为等差数列求和; ②若 $f(n)$ 是关于 n 的指数函数, 累加后可转化为等比数列求和; ③若 $f(n)$ 是关于 n 的二次函数, 累加后可分组求和; ④若 $f(n)$ 是关于 n 的分式函数, 累加后可裂项求和各式相加得

例 1. 若在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n + 2^n$, 求通项 a_n .

答案: $a_n = 2^n + 1$

例 2. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3$, $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n(n-1)}$ ($n \geq 2$), 求此数列的通项公式.

答案: $a_n = 4 - \frac{1}{n}$

练习 1、在数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + n + 1$, 则通项 $a_n =$ _____;

解析: 由题意得, 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) = 2 + (2 + 3 + \cdots + n) = 2 + \frac{(n-1)(2+n)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} + 1$.

又 $a_1 = 2 = \frac{1 \times (1+1)}{2} + 1$, 符合上式,

因此 $a_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$.

【累积法】 (形如 $a_{n+1} = f(n) \cdot a_n$ 型)

(1) 当 $f(n)$ 为常数, 即: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ (其中 q 是不为 0 的常数), 此时数列为

等比数列, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

(2) 当 $f(n)$ 为 n 的函数时, 用累乘法.

例 1、在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $(n+1) \cdot a_{n+1} = n \cdot a_n$, 求 a_n 的表达式.

答案: $a_n = \frac{1}{n}$

例 2、已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = \frac{1}{3}$, 前 n 项和 S_n 与 a_n 的关系是 $S_n = n(2n-1)a_n$, 试求通项公式 a_n .

答案: $a_n = \frac{1}{(2n+1)(2n-1)}.$

练习: 1、设 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的正项数列, 且 $(n+1)a_{n+1}^2 - na_n^2 + a_{n+1} \cdot a_n = 0$ ($n=1, 2, 3, \dots$), 则它的通项公式 $a_n =$ _____.

解析 1: $\because (n+1)a_{n+1}^2 + a_{n+1} \cdot a_n - na_n^2 = 0, \quad \therefore (a_{n+1} + a_n)[(n+1)a_{n+1} - na_n] = 0,$

又 $a_{n+1} + a_n > 0, \quad \therefore (n+1)a_{n+1} - na_n = 0,$

即 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1}, \quad \therefore \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_4}{a_3} \cdot \frac{a_5}{a_4} \cdot \dots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \dots \times \frac{n-1}{n}, \quad \therefore a_n = \frac{1}{n}.$