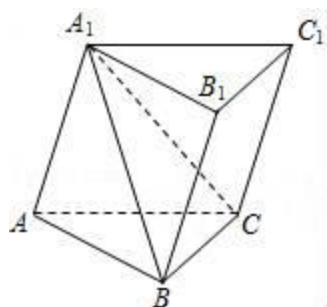


2015-2016 学年高一（下）期末数学试卷

一、填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，共计 70 分.请把答案填写在答题卡相应位置上.

1. 直线 $y=x-3$ 的倾斜角为_____.
2. 函数 $y=2\sin\left(\pi x+\frac{\pi}{2}\right)$ 的最小正周期是_____.
3. 已知圆锥的底面半径为 1，高为 $2\sqrt{2}$ ，则该圆锥的侧面积为_____.
4. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=-n^2+4n$ ，则其公差 d =_____.
5. 若向量 $\vec{a}=(2, m)$ ， $\vec{b}=(1, \sqrt{3})$ ，且 $\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}-\vec{b}$ 垂直，则实数 m 的值为_____.
6. 如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 V_1 ，四棱锥 $A_1-BCC_1B_1$ 的体积为 V_2 ，则 $\frac{V_1}{V_2}$ =_____.



7. 已知角 α 的顶点为坐标原点，始边为 x 轴正半轴，终边过点 $P(-1, 3)$ ，则 $\cos 2\alpha$ 的值为_____.
8. 设 $\{a_n\}$ 是等比数列，若 $a_1+a_2+a_3=7$ ， $a_2+a_3+a_4=14$ ，则 $a_4+a_5+a_6$ =_____.
9. 设 l, m, n 是空间三条不同的直线， α, β 是空间两个不重合的平面，给出下列四个命题：
 - ①若 l 与 m 异面， $m \parallel n$ ，则 l 与 n 异面；
 - ②若 $l \parallel \alpha$ ， $\alpha \parallel \beta$ ，则 $l \parallel \beta$ ；
 - ③若 $\alpha \perp \beta$ ， $l \perp \alpha$ ， $m \perp \beta$ ，则 $l \perp m$ ；
 - ④若 $m \parallel \alpha$ ， $m \parallel n$ ，则 $n \parallel \alpha$.
 其中正确命题的序号有_____。（请将你认为正确命题的序号都填上）
10. 求值： $\frac{\sqrt{3}}{\sin 20^\circ} - \frac{1}{\cos 20^\circ} =$ _____.
11. 在 $\triangle ABC$ 中，设角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，若 $\sqrt{3}\sin A + \cos A = 2$ ， $a=3$ ， $C=\frac{5\pi}{12}$ ，则 b =_____.
12. 已知点 $A(2, 4)$ ， $B(6, -4)$ ，点 P 在直线 $3x-4y+3=0$ 上，若满足 $PA^2+PB^2=\lambda$ 的点 P 有且仅有 1 个，则实数 λ 的值为_____.
13. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知圆 $C: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5$ ， A, B 是圆 C 上的两个动点， $AB=2$ ，则 $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ 的取值范围为_____.

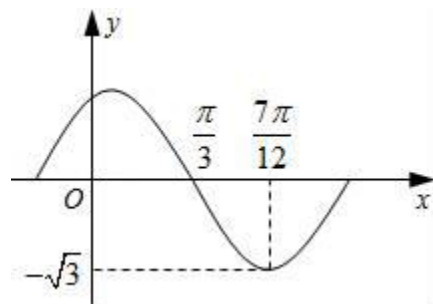
14. 在数列 $\{a_n\}$ 中, 设 $a_i=2^m$ ($i \in \mathbb{N}^*$, $3m-2 \leq i < 3m+1$, $m \in \mathbb{N}^*$), $S_i=a_i+a_{i+3}+a_{i+6}+a_{i+9}+a_{i+12}$, 则满足 $S_i \in [1000, 3000]$ 的 i 的值为_____.

二、解答题: 本大题共 6 小题, 共计 90 分. 请在答题卡指定区域内作答, 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 设函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \phi)$ (A, ω, ϕ 为常数, 且 $A > 0, \omega > 0, 0 < \phi < \pi$) 的部分图象如图所示.

(1) 求 A, ω, ϕ 的值;

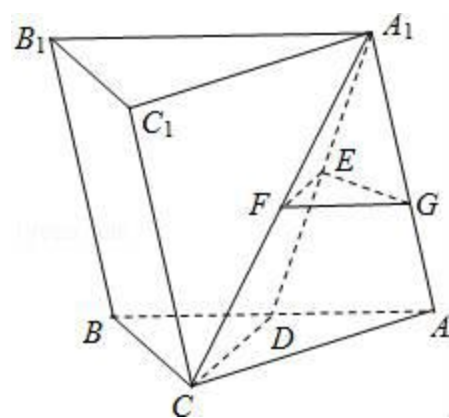
(2) 当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, 求 $f(x)$ 的取值范围.



16. 如图, 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 侧面 $ABB_1A_1 \perp$ 底面 ABC , $CA=CB$, D, E, F 分别为 AB, A_1D, A_1C 的中点, 点 G 在 AA_1 上, 且 $A_1D \perp EG$.

(1) 求证: $CD \parallel$ 平面 EFG ;

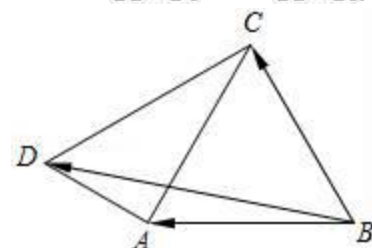
(2) 求证: $A_1D \perp$ 平面 EFG .



17. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\triangle ABC$ 是边长为 6 的正三角形, 设 $\overrightarrow{BD} = x\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{BC}$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

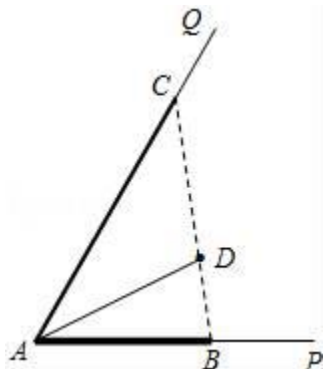
(1) 若 $x=y=1$, 求 $|\overrightarrow{BD}|$;

(2) 若 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC} = 36$, $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BA} = 54$, 求 x, y .



18. 如图所示, $\angle PAQ$ 是村里一个小湖的一角, 其中 $\angle PAQ=60^\circ$. 为了给村民营造丰富的休闲环境, 村委会决定在直线湖岸 AP 与 AQ 上分别建观光长廊 AB 与 AC , 其中 AB 是宽长廊, 造价是 800 元/米; AC 是窄长廊, 造价是 400 元/米; 两段长廊的总造价预算为 12 万元 (恰好都用完); 同时, 在线段 BC 上靠近点 B 的三等分点 D 处建一个表演舞台, 并建水上通道 AD (表演舞台的大小忽略不计), 水上通道的造价是 600 元/米.

- (1) 若规划宽长廊 AB 与窄长廊 AC 的长度相等, 则水上通道 AD 的总造价需多少万元?
- (2) 如何设计才能使得水上通道 AD 的总造价最低? 最低总造价是多少万元?



19. 已知圆 M 的圆心为 $M(-1, 2)$, 直线 $y=x+4$ 被圆 M 截得的弦长为 $\sqrt{2}$, 点 P 在直线 $l: y=x-1$ 上.

- (1) 求圆 M 的标准方程;
- (2) 设点 Q 在圆 M 上, 且满足 $\overrightarrow{MP}=4\overrightarrow{QM}$, 求点 P 的坐标;
- (3) 设半径为 5 的圆 N 与圆 M 相离, 过点 P 分别作圆 M 与圆 N 的切线, 切点分别为 A, B , 若对任意的点 P , 都有 $PA=PB$ 成立, 求圆心 N 的坐标.

20. 设 $\{a_n\}$ 是公比为正整数的等比数列, $\{b_n\}$ 是等差数列, 且 $a_1a_2a_3=64$, $b_1+b_2+b_3=-42$, $6a_1+b_1=2a_3+b_3=0$.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $p_n = \begin{cases} a_n, & n=2k-1, k \in \mathbb{N}^* \\ b_n, & n=2k, k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$, 数列 $\{p_n\}$ 的前 n 项和为 S_n .

- ① 试求最小的正整数 n_0 , 使得当 $n \geq n_0$ 时, 都有 $S_{2n} > 0$ 成立;
- ② 是否存在正整数 m, n ($m < n$), 使得 $S_m = S_n$ 成立? 若存在, 请求出所有满足条件的 m, n ; 若不存在, 请说明理由.

2015-2016 学年江苏省盐城市高一（下）期末数学试卷

参考答案与试题解析

一、填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，共计 70 分.请把答案填写在答题卡相应位置上.

1. 直线 $y=x-3$ 的倾斜角为 45° .

【考点】直线的倾斜角.

【分析】先求出直线的斜率，再求倾斜角.

【解答】解： $\because$ 直线 $y=x-3$ 的斜率 $k=1$,

$\therefore$ 直线 $y=x-3$ 的倾斜角 $\alpha=45^\circ$.

故答案为： 45° .

2. 函数 $y=2\sin\left(\pi x+\frac{\pi}{2}\right)$ 的最小正周期是 2 .

【考点】三角函数的周期性及其求法.

【分析】利用函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的周期为 $\frac{2\pi}{\omega}$, 得出结论.

【解答】解：函数 $y=2\sin\left(\pi x+\frac{\pi}{2}\right)$ 的最小正周期是 $\frac{2\pi}{\pi}=2$,

故答案为：2.

3. 已知圆锥的底面半径为 1, 高为 $2\sqrt{2}$, 则该圆锥的侧面积为 3π .

【考点】旋转体（圆柱、圆锥、圆台）.

【分析】首先根据底面半径和高利用勾股定理求得母线长，然后直接利用圆锥的侧面积公式代入求出即可.

【解答】解： $\because$ 圆锥的底面半径为 1, 高为 $2\sqrt{2}$,

$\therefore$ 母线长为： $\sqrt{1+8}=3$,

$\therefore$ 圆锥的侧面积为： $\pi rl=\pi\times 1\times 3=3\pi$,

故答案为： 3π .

4. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=-n^2+4n$, 则其公差 $d=1$.

【考点】等差数列的前 n 项和.

【分析】由 $S_n=-n^2+4n$, 可得 $a_1=S_1=3$, $a_1+a_2=4$, 分别解得 a_1 , a_2 . 即可得出.

【解答】解： $\because S_n=-n^2+4n$,

$\therefore a_1=S_1=3$, $a_1+a_2=-2^2+8$,

解得 $a_1=3$, $a_2=4$.

$\therefore$ 公差 $d=a_2-a_1=1$.

故答案为：1.

5. 若向量 $\vec{a}=(2, m)$, $\vec{b}=(1, \sqrt{3})$, 且 $\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}-\vec{b}$ 垂直, 则实数 m 的值为 0 .

【考点】平面向量的坐标运算.

【分析】根据平面向量的坐标表示与运算, 列出方程, 求解即可.

【解答】解: 向量 $\vec{a} = (2, m)$, $\vec{b} = (1, \sqrt{3})$,
 $\therefore \vec{a} + \vec{b} = (3, m + \sqrt{3})$,
 $\vec{a} - \vec{b} = (1, m - \sqrt{3})$;

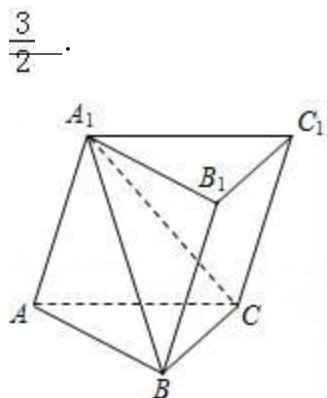
又 $(\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - \vec{b})$,

$$\therefore (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 3 \times 1 + (m + \sqrt{3})(m - \sqrt{3}) = 0,$$

解得 $m = 0$.

故答案为: 0.

6. 如图, 三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的体积为 V_1 , 四棱锥 $A_1 - BCC_1B_1$ 的体积为 V_2 , 则 $\frac{V_1}{V_2} =$ $\frac{3}{2}$.



【考点】棱柱、棱锥、棱台的体积.

【分析】设三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的底面积为 S , 高为 h , 则 $V_1 = Sh$, 三棱锥 $A_1 - ABC$ 的体积为 $\frac{1}{3}Sh$, 可得四棱锥 $A_1 - BCC_1B_1$ 的体积为 $V_2 = \frac{2}{3}Sh$, 即可得出结论.

【解答】解: 设三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的底面积为 S , 高为 h , 则 $V_1 = Sh$,
三棱锥 $A_1 - ABC$ 的体积为 $\frac{1}{3}Sh$, $\therefore$ 四棱锥 $A_1 - BCC_1B_1$ 的体积为 $V_2 = \frac{2}{3}Sh$,

$$\therefore V_2 = \frac{2}{3}V_1,$$

$$\therefore \frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{2}.$$

故答案为: $\frac{3}{2}$.

7. 已知角 α 的顶点为坐标原点, 始边为 x 轴正半轴, 终边过点 $P(-1, 3)$, 则 $\cos 2\alpha$ 的值为

$$-\frac{4}{5}.$$

【考点】二倍角的余弦；任意角的三角函数的定义.

【分析】利用任意角的三角函数的定义，求得 $\cos\alpha$ 的值，再利用二倍角公式求得 $\cos 2\alpha$ 的值.

【解答】解：∵角 α 的顶点为坐标原点，始边为 x 轴正半轴，终边过点 $P(-1, 3)$ ，∴

$$\cos\alpha = \frac{-1}{\sqrt{1+9}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\text{则 } \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2 \times \frac{1}{10} - 1 = -\frac{4}{5},$$

故答案为： $-\frac{4}{5}$.

8. 设 $\{a_n\}$ 是等比数列，若 $a_1+a_2+a_3=7$ ， $a_2+a_3+a_4=14$ ，则 $a_4+a_5+a_6=$ 56.

【考点】等比数列的通项公式.

【分析】已知等式利用等比数列的通项公式变形，求出公比 q 的值，原式变形后代入计算即可求出值.

【解答】解：∵ $\{a_n\}$ 是等比数列， $a_1+a_2+a_3=7$ ， $a_2+a_3+a_4=14$ ，

∴ $(a_1+a_2+a_3)q=14$ ，即 $q=2$ ，

则 $a_4+a_5+a_6 = (a_1+a_2+a_3)q^3=56$ ，

故答案为：56.

9. 设 l, m, n 是空间三条不同的直线， α, β 是空间两个不重合的平面，给出下列四个命题：

①若 l 与 m 异面， $m \parallel n$ ，则 l 与 n 异面；

②若 $l \parallel \alpha$ ， $\alpha \parallel \beta$ ，则 $l \parallel \beta$ ；

③若 $\alpha \perp \beta$ ， $l \perp \alpha$ ， $m \perp \beta$ ，则 $l \perp m$ ；

④若 $m \parallel \alpha$ ， $m \parallel n$ ，则 $n \parallel \alpha$.

其中正确命题的序号有 ③. (请将你认为正确命题的序号都填上)

【考点】空间中直线与平面之间的位置关系.

【分析】利用空间中直线与平面、平面与平面之间的位置关系，对 4 个选项分别进行判断，即可得出结论.

【解答】解：①若 l 与 m 异面， $m \parallel n$ ，则 l 与 n 异面或相交，故不正确；

②若 $l \parallel \alpha$ ， $\alpha \parallel \beta$ ，则 $l \parallel \beta$ 或 $l \subset \beta$ ，故不正确；

③若 $\alpha \perp \beta$ ， $l \perp \alpha$ ， $m \perp \beta$ ，利用正方体模型，可得 $l \perp m$ ，正确；

④若 $m \parallel \alpha$ ， $m \parallel n$ ，则 $n \parallel \alpha$ 或 $n \subset \alpha$ ，故不正确.

故答案为：③.

$$10. \text{求值: } \frac{\sqrt{3}}{\sin 20^\circ} - \frac{1}{\cos 20^\circ} = \underline{4}.$$

【考点】三角函数的化简求值.

【分析】先通分，然后利用辅助角公式结合两角和差的余弦公式进行化简即可.

【解答】解： $\frac{\sqrt{3}}{\sin 20^\circ} - \frac{1}{\cos 20^\circ}$

$$= \frac{\sqrt{3}\cos 20^\circ - \sin 20^\circ}{\sin 20^\circ \cos 20^\circ} = \frac{2(\cos 20^\circ \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 20^\circ \cdot \frac{1}{2})}{\frac{1}{2}\sin 40^\circ} = 4 \cdot \frac{\cos(20^\circ + 30^\circ)}{\sin 40^\circ}$$

$$= \frac{4\cos 50^\circ}{\cos 50^\circ} = 4,$$

故答案为：4

11. 在 $\triangle ABC$ 中，设角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，若 $\sqrt{3}\sin A + \cos A = 2$ ， $a = 3$ ， $C = \frac{5\pi}{12}$ ，则 $b = \underline{\sqrt{6}}$ 。

【考点】正弦定理；三角函数的化简求值。

【分析】 $\sqrt{3}\sin A + \cos A = 2$ ，化为 $2\sin(A + \frac{\pi}{6}) = 2$ ，解得 A ，再利用正弦定理即可得出。

【解答】解： $\because \sqrt{3}\sin A + \cos A = 2$ ，

$$\therefore 2\sin(A + \frac{\pi}{6}) = 2, \text{ 即 } \sin(A + \frac{\pi}{6}) = 1, \because A \in (0, \frac{7\pi}{12}), \therefore (A + \frac{\pi}{6}) \in (\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}),$$

$$\therefore A + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}, \text{ 解得 } A = \frac{\pi}{3}.$$

$$\therefore B = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4},$$

在 $\triangle ABC$ 中，则 $b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{3 \times \sin \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{3}} = \sqrt{6}$ 。

故答案为： $\sqrt{6}$ 。

12. 已知点 $A(2, 4)$ ， $B(6, -4)$ ，点 P 在直线 $3x - 4y + 3 = 0$ 上，若满足 $PA^2 + PB^2 = \lambda$ 的点 P 有且仅有1个，则实数 λ 的值为 $\underline{58}$ 。

【考点】两点间的距离公式。

【分析】根据点 P 在直线 $3x - 4y + 3 = 0$ 上，设出点 P 的坐标，代入 $PA^2 + PB^2 = \lambda$ 中，化简并令 $\Delta = 0$ ，从而求出 λ 的值。

【解答】解：由点 P 在直线 $3x - 4y + 3 = 0$ 上，设 $P(x, \frac{3x+3}{4})$ ，

又 $PA^2 + PB^2 = \lambda$ ，

$$\therefore [(x-2)^2 + (\frac{3x+3}{4} - 4)^2] + [(x-6)^2 + (\frac{3x+3}{4} + 4)^2] = \lambda,$$

$$\text{化简得 } \frac{25}{8}x^2 - \frac{55}{4}x + \frac{585}{8} - \lambda = 0,$$

$$\text{根据题意 } \Delta = (-\frac{55}{4})^2 - 4 \times \frac{25}{8} \times (\frac{585}{8} - \lambda) = 0,$$

解得 $\lambda=58$.

故答案为: 58.

13. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知圆 $C: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5$, A 、 B 是圆 C 上的两个动点, $AB=2$, 则 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ 的取值范围为 $[8-4\sqrt{5}, 8+4\sqrt{5}]$.

【考点】平面向量数量积的运算.

【分析】根据圆的半径和余弦定理求出 $\cos \angle ACB = \frac{3}{5}$, 根据勾股定理求出 CD , $\angle COD = \theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$, 利用向量的加减的几何意义和向量的数量积的运算, 得到

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}^2 + \overrightarrow{OC} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$, 代值, 根据余弦函数的性质计算即可.

【解答】解: $\because$ 圆 $C: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5$,
 $\therefore CA=CB=\sqrt{5}$,

由余弦定理可得 $\cos \angle ACB = \frac{CA^2 + CB^2 - AB^2}{2 \times CA \cdot CB} = \frac{5+5-4}{2 \times 5} = \frac{3}{5}$,

设 D 为 AB 的中点,

$\therefore CD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = 2$,

设 $\angle COD = \theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$,

$\therefore -1 \leq \cos \theta \leq 1$,

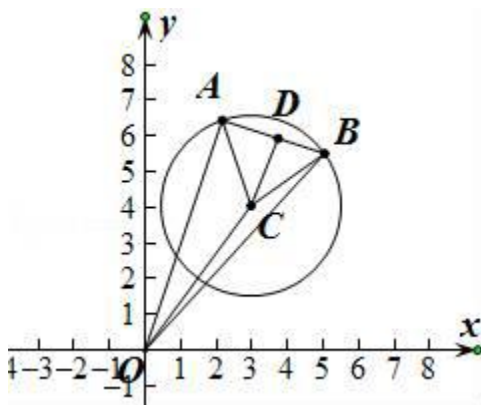
$\because \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CD}$

$\therefore \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA}) \cdot (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{OC}^2 + \overrightarrow{OC} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$

$= 5 + 2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{CD} + \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \frac{3}{5} = 8 + 2 \times \sqrt{5} \times 2 \cdot \cos \theta = 8 + 4\sqrt{5} \cos \theta$,

$\therefore \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ 的取值范围为 $[8-4\sqrt{5}, 8+4\sqrt{5}]$,

故答案为: $[8-4\sqrt{5}, 8+4\sqrt{5}]$.



14. 在数列 $\{a_n\}$ 中, 设 $a_i = 2^m$ ($i \in \mathbb{N}^*$, $3m-2 \leq i < 3m+1$, $m \in \mathbb{N}^*$), $S_i = a_i + a_{i+3} + a_{i+6} + a_{i+9} + a_{i+12}$, 则满足 $S_i \in [1000, 3000]$ 的 i 的值为 2.

【考点】数列的求和.

【分析】根据数列通项公式得出 S_i 关于 m 的表达式，利用 S_i 的范围得出 m 的值，从而得出 i 的值。

【解答】解：∵ $3m - 2 \leq i < 3m + 1$,

$$\therefore 3(m+1) - 2 \leq i+3 < 3(m+1) + 1,$$

$$\therefore a_{i+3} = 2^{m+1},$$

同理可得： $a_{i+6} = 2^{m+2}$, $a_{i+9} = 2^{m+3}$, $a_{i+12} = 2^{m+4}$.

$$\therefore S_i = 2^m + 2^{m+1} + 2^{m+2} + 2^{m+3} + 2^{m+4} = (1+2+4+8+16) 2^m = 31 \cdot 2^m.$$

$$\therefore 1000 \leq 31 \cdot 2^m \leq 3000.$$

$$\therefore \frac{1000}{31} \leq 2^m \leq \frac{3000}{31},$$

$$\therefore m \in \mathbb{N}^*, \therefore 2^m = 64. \therefore m = 6.$$

$$\therefore 3 \times 2 - 2 \leq 6 < 3 \times 2 + 1,$$

$$\therefore i = 2.$$

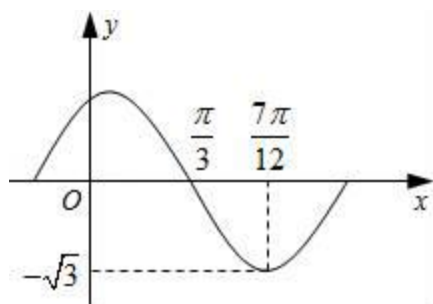
故答案为：2.

二、解答题：本大题共 6 小题，共计 90 分.请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 设函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \phi)$ (A, ω, ϕ 为常数，且 $A > 0, \omega > 0, 0 < \phi < \pi$) 的部分图象如图所示.

(1) 求 A, ω, ϕ 的值;

(2) 当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时，求 $f(x)$ 的取值范围.



【考点】由 $y = A \sin(\omega x + \phi)$ 的部分图象确定其解析式.

【分析】(1) 由函数的图象的顶点坐标求出 A ，由周期求出 ω ，由五点法作图求出 ϕ 的值，可得函数的解析式.

(2) 利用正弦函数的定义域和值域，求得当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时，求 $f(x)$ 的取值范围.

【解答】解：(1) 根据函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \phi)$ (A, ω, ϕ 为常数，且 $A > 0, \omega > 0, 0 < \phi < \pi$) 的部分图象，

$$\text{可得 } A = \sqrt{3}, \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4}, \therefore \omega = 2.$$

$$\text{再根据五点法作图，可得 } 2 \cdot \frac{\pi}{3} + \phi = \pi, \therefore \phi = \frac{\pi}{3}, f(x) = \sqrt{3} \sin(2x + \frac{\pi}{3}).$$

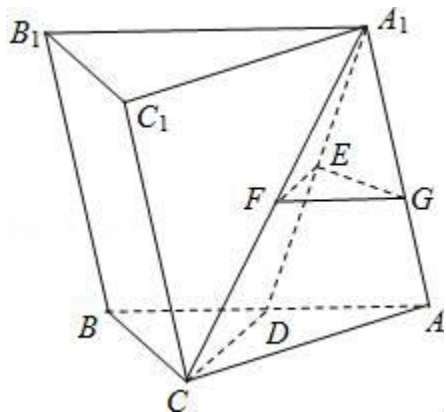
$$(2) \text{ 当 } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \text{ 时, } 2x + \frac{\pi}{3} \in [\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}], \sin(2x + \frac{\pi}{3}) \in [-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1],$$

$$\therefore f(x) \in \left[-\frac{3}{2}, \sqrt{3}\right].$$

16. 如图，在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，侧面 $ABB_1A_1 \perp$ 底面 ABC ， $CA=CB$ ， D ， E ， F 分别为 AB ， A_1D ， A_1C 的中点，点 G 在 AA_1 上，且 $A_1D \perp EG$ 。

(1) 求证： $CD \parallel$ 平面 EFG ；

(2) 求证： $A_1D \perp$ 平面 EFG 。



【考点】 直线与平面平行的判定；直线与平面垂直的判定。

【分析】 (1) 利用三角形的中位线的性质，证明 $EF \parallel CD$ ，利用线面平行的判定定理证明： $CD \parallel$ 平面 EFG ；

(2) 利用等腰三角形三线合一证明 $CD \perp AB$ ，利用平面与平面垂直的性质证明 $CD \perp A_1D$ ，利用线面垂直的判定定理证明： $A_1D \perp$ 平面 EFG 。

【解答】 证明：(1) $\because E$ ， F 分别为 A_1D ， A_1C 的中点，

$\therefore EF \parallel CD$ ，

$\because CD \not\subset$ 平面 EFG ， $EF \subset$ 平面 EFG ，

$\therefore CD \parallel$ 平面 EFG ；

(2) $\because CA=CB$ ， D 为 AB 的中点，

$\therefore CD \perp AB$ ，

$\because$ 侧面 $ABB_1A_1 \perp$ 底面 ABC ，侧面 $ABB_1A_1 \cap$ 底面 $ABC=AB$ ，

$\therefore CD \perp$ 侧面 ABB_1A_1 ，

$\therefore CD \perp A_1D$ ，

$\because EF \parallel CD$ ，

$\therefore A_1D \perp EF$ ，

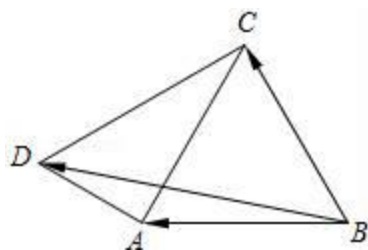
$\because A_1D \perp EG$ ， $EF \cap EG=E$ ，

$\therefore A_1D \perp$ 平面 EFG 。

17. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $\triangle ABC$ 是边长为 6 的正三角形，设 $\overrightarrow{BD} = x\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{BC}$ ($x, y \in \mathbb{R}$)。

(1) 若 $x=y=1$ ，求 $|\overrightarrow{BD}|$ ；

(2) 若 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC} = 36$ ， $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BA} = 54$ ，求 x, y 。



【考点】平面向量数量积的运算；平面向量的基本定理及其意义.

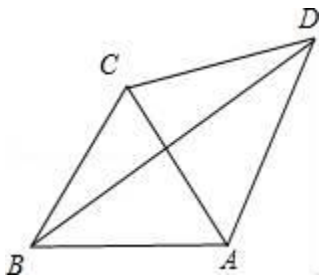
【分析】(1) $x, y=1$ 时, 根据向量加法的平行四边形法则, 以及等边三角形的中线也是高线便可求出 BD 的长度, 即求出 $|\overrightarrow{BD}|$ 的值;

(2) 可设 $BD=d$, $\angle DBC=\theta$, 根据条件及向量数量积的计算公式便可得出不等式组

$$\begin{cases} 6d\cos\theta=36 \\ 6d\cos(60^\circ-\theta)=54 \end{cases}, \text{ 解该不等式组可求出 } d \text{ 的大小, 然后对 } \overrightarrow{BD}=x\overrightarrow{BA}+y\overrightarrow{BC} \text{ 两边平方}$$

即可得出 $x^2+xy+y^2=\frac{7}{3}$ ①; 再根据该问的条件可得到方程 $x-y=1$ ②, 这样两式联立即可求出 x, y 的值.

【解答】解: (1) 如图,



若 $x=y=1$, 则 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$;

$\therefore BD$ 过 AC 的中点 E , 且 $BD=2BE=3\sqrt{3}$;

即 $|\overrightarrow{BD}|=3\sqrt{3}$;

(2) 设 $\angle DBC=\theta$, 则 $\angle DBA=60^\circ-\theta$, 设 $BD=d$;

$\therefore$ 由 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC}=36$, $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BA}=54$ 得:

$$\begin{cases} 6d\cos\theta=36 \\ 6d\cos(60^\circ-\theta)=54 \end{cases}$$

解得, $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$, $d=2\sqrt{21}$;

$$\therefore \overrightarrow{BD}^2 = x^2 \overrightarrow{BA}^2 + 2xy \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + y^2 \overrightarrow{BC}^2;$$

即 $84=36x^2+36xy+36y^2$, 整理得, $x^2+xy+y^2=\frac{7}{3}$ ①;

$$\text{且 } \overrightarrow{BD} \cdot (\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CA} = 18;$$

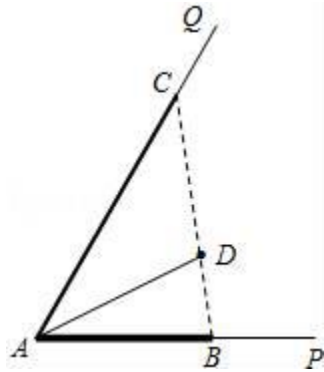
$$\therefore x\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} + y\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = 18x - 18y = 18;$$

$$\therefore x - y = 1 \text{ ②};$$

①②联立得, $y=\frac{1}{3}$, 或 $-\frac{4}{3}$ (舍去), $x=\frac{4}{3}$.

18. 如图所示, $\angle PAQ$ 是村里一个小湖的一角, 其中 $\angle PAQ=60^\circ$. 为了给村民营造丰富的休闲环境, 村委会决定在直线湖岸 AP 与 AQ 上分别建观光长廊 AB 与 AC , 其中 AB 是宽长廊, 造价是 800 元/米; AC 是窄长廊, 造价是 400 元/米; 两段长廊的总造价预算为 12 万元 (恰好都用完); 同时, 在线段 BC 上靠近点 B 的三等分点 D 处建一个表演舞台, 并建水上通道 AD (表演舞台的大小忽略不计), 水上通道的造价是 600 元/米.

- (1) 若规划宽长廊 AB 与窄长廊 AC 的长度相等, 则水上通道 AD 的总造价需多少万元?
- (2) 如何设计才能使得水上通道 AD 的总造价最低? 最低总造价是多少万元?



【考点】基本不等式在最值问题中的应用.

【分析】(1) 设 $AB=AC=x$ (单位: 百米), 由题意可得 $12x=12$, 即 $x=1$, 求得 $BD=\frac{1}{3}$, 在 $\triangle ABD$ 中, 由余弦定理求得 AD 的长, 即可得到所求造价;

(2) 设 $AB=x$, $AC=y$ (单位: 百米), 则两段长廊的总造价为 $8x+4y=12$, 即 $2x+y=3$, $y=3-2x$, 运用余弦定理求得 BC , 再在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ABD$ 中, 由余弦定理及 $\cos \angle ABC = \cos \angle ABD$, 求得 AD^2 的解析式, 化简整理, 运用配方, 即可得到所求最小值, 及 x, y 的值.

【解答】解: (1) 设 $AB=AC=x$ (单位: 百米),
则宽长廊造价为 $8x$ 万元, 窄长廊造价为 $4x$ 万元,
故两段长廊的总造价为 $12x$ 万元, 所以 $12x=12$, 得 $x=1$,
又 $\angle PAQ=60^\circ$, $\triangle ABC$ 是边长为 1 的正三角形,

又点 D 为线段 BC 上靠近点 B 的三等分点, 所以 $BD=\frac{1}{3}$,

在 $\triangle ABD$ 中, 由余弦定理得

$$AD^2 = BA^2 + BD^2 - 2BA \cdot BD \cdot \cos \angle ABD = 1 + \frac{1}{9} - 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{9}, \text{ 即 } AD = \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

又水上通道的造价是 6 万元/百米, 所以水上通道的总造价为 $2\sqrt{7}$ 万元.

(2) 设 $AB=x$, $AC=y$ (单位: 百米), 则两段长廊的总造价为 $8x+4y=12$, 即 $2x+y=3$, 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \frac{1}{2} = x^2 + y^2 - xy,$$

在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ABD$ 中, 由余弦定理及 $\cos \angle ABC = \cos \angle ABD$, 得

$$\frac{BA^2 + BC^2 - AC^2}{2BA \cdot BC} = \frac{BA^2 + BD^2 - AD^2}{2BA \cdot BD}, \text{ 又 } BC=3BD,$$

$$\begin{aligned} \text{得 } AD^2 &= \frac{4}{9}x^2 + \frac{1}{9}y^2 + \frac{2}{9}xy = \frac{4}{9}x^2 + \frac{1}{9}(3-2x)^2 + \frac{2}{9}x(3-2x) = \frac{4}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + 1 \\ &= \frac{4}{9}\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{4}, \text{ 当且仅当 } x = \frac{3}{4} \text{ 时, } AD \text{ 有最小值 } \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{aligned}$$

故总造价有最小值 $3\sqrt{3}$ 万元, 此时 $y = \frac{3}{2}$,

即当宽长廊 AB 为 $\frac{3}{4}$ 百米 (75 米)、窄长廊 AC 为 $\frac{3}{2}$ 百米时,

水上通道 AD 有最低总造价为 $3\sqrt{3}$ 万元.

19. 已知圆 M 的圆心为 M(-1, 2), 直线 $y=x+4$ 被圆 M 截得的弦长为 $\sqrt{2}$, 点 P 在直线 l: $y=x-1$ 上.

(1) 求圆 M 的标准方程;

(2) 设点 Q 在圆 M 上, 且满足 $\overrightarrow{MP} = 4\overrightarrow{QM}$, 求点 P 的坐标;

(3) 设半径为 5 的圆 N 与圆 M 相离, 过点 P 分别作圆 M 与圆 N 的切线, 切点分别为 A, B, 若对任意的点 P, 都有 $PA=PB$ 成立, 求圆心 N 的坐标.

【考点】圆方程的综合应用.

【分析】(1) 求出 M 到直线 $y=x+4$ 的距离, 利用垂径定理计算圆 M 的半径, 得出圆 M 的标准方程;

(2) 由 $|MQ|=1$ 可知 $|MP|=4$, 利用两点间的距离公式列方程解出 P 点坐标;

(3) 由切线的性质可知 $PA^2=PM^2-1$, $PB^2=PN^2-5$. 设 N(m, n), P(x, x-1), 列出方程, 令关于 x 的方程恒成立得出 m, n.

【解答】解: (1) 点 M 到直线 $y=x+4$ 的距离 $d = \frac{|-1-2+4|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\therefore \text{圆 M 的半径 } r = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1.$$

$\therefore$ 圆 M 的标准方程为: $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$.

(2) $\because$ 点 Q 在圆 M 上, $\therefore |\overrightarrow{QM}| = 1$.

$$\therefore |\overrightarrow{MP}| = 4|\overrightarrow{QM}| = 4.$$

$$\text{设 } P(a, b) \text{ 则 } \begin{cases} b=a-1 \\ \sqrt{(a+1)^2 + (b-2)^2} = 4 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}.$$

$\therefore$ 点 P 坐标为 (-1, -2) 或 (3, 2).

(3) 设 N(m, n), P(x, x-1),

$\because$ PA, PB 分别与圆 M, 圆 N 相切,

$$\therefore PA^2 = PM^2 - 1, PB^2 = PN^2 - 5.$$

$\because$ 对任意点 P, 都有 $PA=PB$,

$$\therefore (x+1)^2 + (x-3)^2 - 1 = (x-m)^2 + (x-1-n)^2 - 25 \text{ 恒成立.}$$

整理得: $2(m+n-1)x + 33 - m^2 - n^2 - 2n = 0$ 恒成立.

$$\therefore \begin{cases} m+n-1=0 \\ 33-m^2-n^2-2n=0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} m=5 \\ n=-4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} m=-3 \\ n=4 \end{cases}.$$

$\therefore$ N(5, -4) 或 N(-3, 4).

20. 设 $\{a_n\}$ 是公比为正整数的等比数列, $\{b_n\}$ 是等差数列, 且 $a_1a_2a_3=64$, $b_1+b_2+b_3=-42$, $6a_1+b_1=2a_3+b_3=0$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $p_n = \begin{cases} a_n, & n=2k-1, k \in \mathbb{N}^* \\ b_n, & n=2k, k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$, 数列 $\{p_n\}$ 的前 n 项和为 S_n .

①试求最小的正整数 n_0 , 使得当 $n \geq n_0$ 时, 都有 $S_{2n} > 0$ 成立;

②是否存在正整数 m, n ($m < n$), 使得 $S_m = S_n$ 成立? 若存在, 请求出所有满足条件的 m, n ; 若不存在, 请说明理由.

【考点】等比数列的前 n 项和.

【分析】(1) 利用等差数列与等比数列的通项公式即可得出.

(2) ① $p_n = \begin{cases} a_n, & n=2k-1, k \in \mathbb{N}^* \\ b_n, & n=2k, k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$, 可得数列 $\{p_n\}$ 的前 $2n$ 项和 $S_{2n} = (a_1+a_3+\dots+a_{2n-1}) +$

$$(b_2+b_4+\dots+b_{2n}) = \frac{2}{3} \times 4^n - \frac{2}{3} - 2n^2 - 12n. \quad n=1, 2, 3 \text{ 时}, S_{2n} < 0. \quad n \geq 4 \text{ 时}, \text{ 都有 } S_{2n} > 0. \text{ 即可}$$

可得出.

②由 $S_1=2, S_2=-12, S_3=-4, S_4=-22, S_5=10, S_6=-12, S_7=116$. 由①可知: 使得当 $n \geq 4$ 时, 都有 $S_{2n} > 0$ 成立, 而 $a_n=2^n > 0$. 因此 $n \geq 8$ 时, 都有 $S_n > 0$, 且 S_n 单调递增. 即可得出.

【解答】解: (1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q > 0$, 等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d , $\because a_1a_2a_3=64$, $b_1+b_2+b_3=-42$, $6a_1+b_1=2a_3+b_3=0$.

$$\therefore a_2^3=64, 3b_2=-42, \frac{6a_2}{q} + b_2 - d = 2a_2q + b_2 + d = 0,$$

联立解得 $a_2=4, b_2=-14, q=2, d=-2$.

$$\therefore a_n = a_2 q^{n-2} = 4 \times 2^{n-2} = 2^n, \quad b_n = b_2 + (n-2)d = -14 - 2(n-2) = -2n - 10.$$

(2) ① $\because p_n = \begin{cases} a_n, & n=2k-1, k \in \mathbb{N}^* \\ b_n, & n=2k, k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$,

数列 $\{p_n\}$ 的前 $2n$ 项和 $S_{2n} = (a_1+a_3+\dots+a_{2n-1}) + (b_2+b_4+\dots+b_{2n})$

$$= \frac{2(4^n - 1)}{4 - 1} - 14n + \frac{n(n-1)}{2} \times (-4) = \frac{2}{3} \times 4^n - \frac{2}{3} - 2n^2 - 12n.$$

$n=1, 2, 3$ 时, $S_{2n} < 0$. $n \geq 4$ 时, 都有 $S_{2n} > 0$. $\therefore$ 最小的正整数 $n_0=4$, 使得当 $n \geq n_0$ 时, 都有 $S_{2n} > 0$ 成立.

②由 $S_1=2, S_2=-12, S_3=-12+2^3=-4, S_4=-22, S_5=-22+2^5=10, S_6=-12, S_7=-12+2^7=116$.

由①可知: 使得当 $n \geq 4$ 时, 都有 $S_{2n} > 0$ 成立, 而 $a_n=2^n > 0$.

因此 $n \geq 8$ 时, 都有 $S_n > 0$, 且 S_n 单调递增.

假设存在正整数 m, n ($m < n$), 使得 $S_m = S_n$ 成立,

则取 $m=2$, $n=6$ 时, $S_m=S_n=-12$ 成立,
由 $n\geq 8$ 时, 都有 $S_n>0$, 且 S_n 单调递增, $S_8=90$. 因此 $S_m=S_n$ 不可能成立.
综上可得: 只有 $m=2$, $n=6$ 时, 使得 $S_m=S_n$ 成立.