



2016-2017 学年高一（上）期末数学试卷

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. $\sin 210^\circ =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. $\sin 27^\circ \cos 18^\circ + \cos 27^\circ \sin 18^\circ$ 的值为 ()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

3. 已知集合 $A = \{x | 1 < 2^x < 8\}$ ，集合 $B = \{x | 0 < \log_2 x < 1\}$ ，则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{x | 1 < x < 3\}$ B. $\{x | 1 < x < 2\}$ C. $\{x | 2 < x < 3\}$ D. $\{x | 0 < x < 2\}$

4. 已知 $a = \sin 80^\circ$ ， $b = (\frac{1}{2})^{-1}$ ， $c = \log_{\frac{1}{2}} 3$ ，则 ()

- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $c > a > b$ D. $b > c > a$

5. 一扇形的圆心角为 60° ，所在圆的半径为 6，则它的面积是 ()

- A. 6π B. 3π C. 12π D. 9π

6. 若 $\alpha, \beta \in (0, \pi)$ 且 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ ， $\tan \beta = \frac{1}{3}$ ，则 $\alpha + \beta =$ ()

- A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{3\pi}{4}$ C. $\frac{5\pi}{4}$ D. $\frac{7\pi}{4}$

7. $y = 3\sin(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3})$ 的一条对称轴是 ()

- A. $x = \frac{2\pi}{3}$ B. $x = \frac{\pi}{2}$ C. $x = -\frac{\pi}{3}$ D. $x = \frac{8\pi}{3}$

8. 要得到 $y = 3\cos(2x - \frac{\pi}{3})$ 的图象，只需将 $y = 3\cos 2x$ 的图象 ()

- A. 右移 $\frac{\pi}{3}$ B. 左移 $\frac{\pi}{3}$ C. 右移 $\frac{\pi}{6}$ D. 左移 $\frac{\pi}{6}$

9. 函数 $y = \sqrt{2\sin(\pi - 2x) - 1}$ 的定义域为 ()

- A. $\{x | 2k\pi + \frac{\pi}{6} \leq x \leq 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}\}$

- B. $\{x | k\pi + \frac{\pi}{6} \leq x \leq k\pi + \frac{5\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}\}$



C. $\{x | 2k\pi + \frac{\pi}{3} \leq x \leq 2k\pi + \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\}$

D. $\{x | k\pi + \frac{\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{5\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}\}$

10. 函数 $y = \sin x + \cos x$ 的值域是 ()

- A. $[-1, 1]$ B. $[-2, 2]$ C. $[-1, \sqrt{2}]$ D. $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

11. 下列函数中既是偶函数, 最小正周期又是 π 的是 ()

- A. $y = \sin 2x$ B. $y = \cos x$ C. $y = \tan x$ D. $y = |\tan x|$

12. 函数 $f(x) = \ln x + x^2 + a - 1$ 有唯一的零点在区间 $(1, e)$ 内, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(-e^2, 0)$ B. $(-e^2, 1)$ C. $(1, e)$ D. $(1, e^2)$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分.

13. 若 $\tan \alpha = 2$, 则 $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$ 的值为_____.

14. 已知函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1)$ 的单调递增区间为_____.

15. $y = \frac{1}{2} \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ 的对称中心是_____.

16. 若 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$, 则 $(1 + \tan \alpha) \cdot (1 + \tan \beta) =$ _____.

三、解答题: 本题共 6 小题, 17 题 10 分, 18--22 每小题 10 分.

17. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 4x - 5 < 0\}$, $B = \{x | 3 < 2x - 1 < 7\}$, 设全集 $U = \mathbb{R}$,

求 (1) $A \cup B$. (2) $A \cap C_U B$.

18. 化简 $\frac{\sin(-x)\cos(\pi-x)}{\sin(\pi+x)\cos(2\pi-x)} - \frac{\sin(\pi-x)\cos(\pi+x)}{\cos(\frac{\pi}{2}-x)\cos(-x)}$.

19. 已知函数 $y = A \sin(\omega x + \phi)$ 其中 $A > 0$, $\omega > 0$, $|\phi| < \frac{\pi}{2}$, 若函数的最小正周期为 π , 最大值为 2, 且过 $(0, 1)$ 点,

- (1) 求函数的解析式;
- (2) 求函数的单调递减区间.



20. 已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3}\sin x \cos x + \sin^2 x - \cos^2 x$,

- (1) 求 $f(x)$ 的值域;
- (2) 说明怎样由 $y = \sin x$ 的图象得到 $f(x)$ 的图象.

21. 已知 $\alpha, \beta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 且 $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$, $\sin \beta = \frac{5}{13}$,

- (1) 求 $\sin(\alpha + \beta)$, 与 $\cos(\alpha - \beta)$ 的值;
- (2) 求 $\tan(2\alpha - \beta)$ 的值.

22. 已知函数 $f(x) = 3\sin^2 x + a \cos x - \cos^2 x + a^2 - 1$,

- (1) 判断 $f(x)$ 的奇偶性, 并加以证明;
- (2) 求 $f(x)$ 的最大值.



2016-2017 学年高一（上）期末数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. $\sin 210^\circ =$ ()

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

【考点】运用诱导公式化简求值.

【分析】利用诱导公式可得 $\sin 210^\circ = \sin = -\sin 30^\circ$ ，化简得出结果.

【解答】解： $\sin 210^\circ = \sin = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$ ，

故选 C.

2. $\sin 27^\circ \cos 18^\circ + \cos 27^\circ \sin 18^\circ$ 的值为 ()

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

【考点】两角和与差的余弦函数.

【分析】利用两角和的正弦函数公式，特殊角的三角函数值即可计算得解.

【解答】解： $\sin 27^\circ \cos 18^\circ + \cos 27^\circ \sin 18^\circ$

$$= \sin (27^\circ + 18^\circ)$$

$$= \sin 45^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

故选：A.

3. 已知集合 $A = \{x | 1 < 2^x < 8\}$ ，集合 $B = \{x | 0 < \log_2 x < 1\}$ ，则 $A \cap B =$ ()

A. $\{x | 1 < x < 3\}$ B. $\{x | 1 < x < 2\}$ C. $\{x | 2 < x < 3\}$ D. $\{x | 0 < x < 2\}$

【考点】交集及其运算.



【分析】化简集合 A、B，根据交集的定义写出 $A \cap B$ 即可.

【解答】解：集合 $A = \{x | 1 < 2^x < 8\} = \{x | 0 < x < 3\}$,

集合 $B = \{x | 0 < \log_2 x < 1\} = \{x | 1 < x < 2\}$,

则 $A \cap B = \{x | 1 < x < 2\}$.

故选：B.

4. 已知 $a = \sin 80^\circ$, $b = (\frac{1}{2})^{-1}$, $c = \log_{\frac{1}{2}} 3$, 则 ()

A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $c > a > b$ D. $b > c > a$

【考点】对数值大小的比较.

【分析】利用三角函数的单调性、指数函数与对数函数的单调性即可得出.

【解答】解： $a = \sin 80^\circ \in (0, 1)$, $b = (\frac{1}{2})^{-1} = 2$, $c = \log_{\frac{1}{2}} 3 < 0$,

则 $b > a > c$.

故选：B.

5. 一扇形的圆心角为 60° ，所在圆的半径为 6，则它的面积是 ()

A. 6π B. 3π C. 12π D. 9π

【考点】扇形面积公式.

【分析】根据扇形的面积公式代入计算，即可得解.

【解答】解： $\because \alpha = \frac{\pi}{3}$, $r = 6$,

\therefore 由扇形面积公式得： $S = \frac{1}{2} r^2 \alpha = \frac{1}{2} \times 6^2 \times \frac{\pi}{3} = 6\pi$.

故选：A.

6. 若 $\alpha, \beta \in (0, \pi)$ 且 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$, $\tan \beta = \frac{1}{3}$, 则 $\alpha + \beta =$ ()

A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{3\pi}{4}$ C. $\frac{5\pi}{4}$ D. $\frac{7\pi}{4}$

【考点】两角和与差的正切函数.

【分析】直接利用两角和的正切函数求解即可.



【解答】解：∵ $\alpha, \beta \in (0, \pi)$ 且 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$, $\tan \beta = \frac{1}{3}$,

$$\text{则 } \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = 1,$$

$$\therefore \alpha + \beta = \frac{\pi}{4}.$$

故选：A.

7. $y = 3\sin(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3})$ 的一条对称轴是 ()

- A. $x = \frac{2\pi}{3}$ B. $x = \frac{\pi}{2}$ C. $x = -\frac{\pi}{3}$ D. $x = \frac{8\pi}{3}$

【考点】正弦函数的图象.

【分析】由题意, $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $x = 2k\pi + \frac{5\pi}{3}$, ($k \in \mathbb{Z}$), 即可得出结论.

【解答】解: 由题意, $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} = k\pi + \frac{\pi}{2}$,

$$\therefore x = 2k\pi + \frac{5\pi}{3}, \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

$$\therefore y = 3\sin(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}) \text{ 的一条对称轴是 } x = -\frac{\pi}{3},$$

故选 C.

8. 要得到 $y = 3\cos(2x - \frac{\pi}{3})$ 的图象, 只需将 $y = 3\cos 2x$ 的图象 ()

- A. 右移 $\frac{\pi}{3}$ B. 左移 $\frac{\pi}{3}$ C. 右移 $\frac{\pi}{6}$ D. 左移 $\frac{\pi}{6}$

【考点】函数 $y = A\sin(\omega x + \phi)$ 的图象变换.

【分析】根据三角函数图象平移的法则, 即可得出正确的结论.

【解答】解: 函数 $y = 3\cos(2x - \frac{\pi}{3}) = 3\cos[2(x - \frac{\pi}{6})]$,

要得到 $y = 3\cos(2x - \frac{\pi}{3})$ 的图象,

只需将 $y = 3\cos 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位.

故选: C.

9. 函数 $y = \sqrt{2\sin(\pi - 2x) - 1}$ 的定义域为 ()

- A. $\{x \mid 2k\pi + \frac{\pi}{6} \leq x \leq 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}\}$
- B. $\{x \mid k\pi + \frac{\pi}{6} \leq x \leq k\pi + \frac{5\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}\}$
- C. $\{x \mid 2k\pi + \frac{\pi}{3} \leq x \leq 2k\pi + \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\}$
- D. $\{x \mid k\pi + \frac{\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{5\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}\}$

【考点】 函数的定义域及其求法.

【分析】 根据函数成立的条件即可求函数的定义域.

【解答】 解: 要使函数有意义, 则 $2\sin(\pi - 2x) - 1 \geq 0$,

即 $\sin 2x \geq \frac{1}{2}$,

则 $2k\pi + \frac{\pi}{6} \leq 2x \leq 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$,

则 $k\pi + \frac{\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{5\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}$,

即函数的定义域为 $\{x \mid k\pi + \frac{\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{5\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}\}$,

故选: D

10. 函数 $y = \sin x + \cos x$ 的值域是 ()

- A. $[-1, 1]$ B. $[-2, 2]$ C. $[-1, \sqrt{2}]$ D. $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

【考点】 三角函数中的恒等变换应用; 正弦函数的定义域和值域.

【分析】 利用两角和差的正弦公式 把函数 y 化为 $\sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$, 根据 $-1 \leq \sin(x + \frac{\pi}{4}) \leq 1$, 得到 $-\sqrt{2} \leq \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) \leq \sqrt{2}$, 从而得到函数 y 的值域.

【解答】 解: 函数 $y = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$,

由于 $-1 \leq \sin(x + \frac{\pi}{4}) \leq 1, \therefore -\sqrt{2} \leq \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) \leq \sqrt{2}$,

故函数 $y = \sin x + \cos x$ 的值域是 $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$,



选 D.

11. 下列函数中既是偶函数，最小正周期又是 π 的是 ()

A. $y=\sin 2x$ B. $y=\cos x$ C. $y=\tan x$ D. $y=|\tan x|$

【考点】三角函数的周期性及其求法；函数奇偶性的判断.

【分析】逐一分析各个选项，利用三角函数的奇偶性、周期性排除 A、B、C，从而得到 D 正确.

【解答】解：由于函数 $y=\sin 2x$ 周期为 π ，不是偶函数，故排除 A.

由于函数 $y=\cos x$ 周期为 2π ，是偶函数，故排除 B.

由于函数 $y=\tan x$ 是周期函数，且周期为 π ，但它不是偶函数，故排除 C.

由于函数 $y=|\tan x|$ 是周期函数，且周期为 π ，且是偶函数，故满足条件，故选：D.

12. 函数 $f(x)=\ln x+x^2+a-1$ 有唯一的零点在区间 $(1, e)$ 内，则实数 a 的取值范围是 ()

A. $(-e^2, 0)$ B. $(-e^2, 1)$ C. $(1, e)$ D. $(1, e^2)$

【考点】二分法的定义.

【分析】利用导数得到函数为增函数，由题意可得 $f(1) < 0$ 且 $f(e) > 0$ ，解得即可.

【解答】解： $\because f(x)=\ln x+x^2+a-1$,

$\therefore f'(x)=\frac{1}{x}+2a > 0$ 在区间 $(1, e)$ 上恒成立，

$\therefore f(x)$ 在 $(1, e)$ 上单调递增，

\because 函数 $f(x)=\ln x+x^2+a-1$ 有唯一的零点在区间 $(1, e)$ 内，

$\therefore f(1) < 0$ 且 $f(e) > 0$,

$$\text{即} \begin{cases} \ln 1+1+a-1 < 0 \\ \ln e+e^2+a-1 > 0 \end{cases},$$

解得 $-e^2 < a < 0$,

故选：A



二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分。

13. 若 $\tan\alpha=2$ ，则 $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$ 的值为 $\frac{1}{3}$ 。

【考点】同角三角函数基本关系的运用。

【分析】利用同角三角函数的基本关系求得要求式子的值。

【解答】解： $\because \tan\alpha=2$ ， $\therefore \frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{\tan\alpha - 1}{\tan\alpha + 1} = \frac{1}{3}$ ，

故答案为： $\frac{1}{3}$

14. 已知函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -1)$ 。

【考点】复合函数的单调性。

【分析】令 $t = x^2 - 1 > 0$ ，求得函数的定义域，再由 $y = \log_{\frac{1}{2}} t$ ，本题即求函数 t 在定义域内的减区间，再利用二次函数的性质可得结论。

【解答】解：令 $t = x^2 - 1 > 0$ ，求得 $x > 1$ ，或 $x < -1$ ，故函数的定义域为 $\{x | x > 1, \text{ 或 } x < -1\}$ ，且 $y = \log_{\frac{1}{2}} t$ ，

故本题即求函数 t 在定义域内的减区间。

再利用二次函数的性质可得函数 t 在定义域内的减区间为 $(-\infty, -1)$ ，

故答案为： $(-\infty, -1)$ 。

15. $y = \frac{1}{2}\sin(2x - \frac{\pi}{3})$ 的对称中心是 $(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}, 0)$ ， $k \in \mathbb{Z}$ 。

【考点】正弦函数的图象。

【分析】利用正弦函数的图象的对称性，求得该函数的图象的对称中心。

【解答】解： \because 函数 $y = \frac{1}{2}\sin(2x - \frac{\pi}{3})$ ，令 $2x - \frac{\pi}{3} = k\pi$ ，求得 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ，

故函数的图象的对称中心是 $(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}, 0)$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ，

故答案为： $(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}, 0)$ ($k \in \mathbb{Z}$)。



16. 若 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$, 则 $(1 + \tan\alpha) \cdot (1 + \tan\beta) = \underline{2}$.

【考点】两角和与差的正切函数.

【分析】先求出 $\tan(\alpha + \beta) = 1$, 把所求的式子展开, 把 $\tan\alpha + \tan\beta$ 换成 $\tan(\alpha + \beta)(1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta)$, 运算求出结果.

【解答】解: $\because \alpha + \beta = \frac{\pi}{4}, \therefore \tan(\alpha + \beta) = 1$.

$\therefore (1 + \tan\alpha) \cdot (1 + \tan\beta) = 1 + \tan\alpha + \tan\beta + \tan\alpha \cdot \tan\beta = 1 + \tan(\alpha + \beta)(1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta) + \tan\alpha \cdot \tan\beta$
 $= 1 + 1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta - \tan\alpha \cdot \tan\beta = 2,$
故答案为 2.

三、解答题: 本题共 6 小题, 17 题 10 分, 18--22 每小题 10 分.

17. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 4x - 5 < 0\}$, $B = \{x | 3 < 2x - 1 < 7\}$, 设全集 $U = \mathbb{R}$, 求 (1) $A \cup B$. (2) $A \cap C_U B$.

【考点】交、并、补集的混合运算.

【分析】由已知中集合 $A = \{x | x^2 - 4x - 5 < 0\}$, $B = \{x | 3 < 2x - 1 < 7\}$, 全集 $U = \mathbb{R}$, 结合集合交集, 并集, 补集的定义, 可得答案.

【解答】解: (1) \because 集合 $A = \{x | x^2 - 4x - 5 < 0\} = \{x | -1 < x < 5\}$,
集合 $B = \{x | 3 < 2x - 1 < 7\} = \{x | 2 < x < 4\}$,
故 $A \cup B = \{x | -1 < x < 5\}$;

(2) 由 (1) 中 $C_U B = \{x | x \leq 2 \text{ 或 } x \geq 4\}$ 可得:

$A \cap C_U B = \{x | -1 < x \leq 2 \text{ 或 } 4 \leq x < 5\}$.

18. 化简 $\frac{\sin(-x)\cos(\pi-x)}{\sin(\pi+x)\cos(2\pi-x)} - \frac{\sin(\pi-x)\cos(\pi+x)}{\cos(\frac{\pi}{2}-x)\cos(-x)}$.

【考点】三角函数的化简求值.

【分析】运用三角函数的诱导公式, 化简即可得到所求值.



【解答】解：
$$\frac{\sin(-x)\cos(\pi-x)}{\sin(\pi+x)\cos(2\pi-x)} - \frac{\sin(\pi-x)\cos(\pi+x)}{\cos(\frac{\pi}{2}-x)\cos(-x)}$$

$$= \frac{(-\sin x)(-\cos x)}{(-\sin x)\cos x} - \frac{\sin x(-\cos x)}{\sin x \cos x} = -1+1=0.$$

19. 已知函数 $y=A\sin(\omega x+\phi)$ 其中 $A>0, \omega>0, |\phi|<\frac{\pi}{2}$, 若函数的最小正周期为 π , 最大值为 2, 且过 $(0, 1)$ 点,

- (1) 求函数的解析式;
- (2) 求函数的单调递减区间.

【考点】由 $y=A\sin(\omega x+\phi)$ 的部分图象确定其解析式; 正弦函数的图象.

- 【分析】**(1) 根据函数的周期, 最值过定点, 求出 A, ω 和 ϕ 的值即可,
 (2) 结合三角函数的单调性进行求解即可.

【解答】解: (1) \because 函数的最小正周期为 π , 最大值为 2,

$$\therefore A=2, T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi, \text{ 即 } \omega=2,$$

则函数 $y=2\sin(2x+\phi)$,

\because 函数过 $(0, 1)$ 点,

$$\therefore 2\sin\phi=1, \text{ 即 } \sin\phi=\frac{1}{2},$$

$$\because |\phi|<\frac{\pi}{2}, \therefore \phi=\frac{\pi}{6},$$

则 $y=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$.

(2) 由 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leq 2x+\frac{\pi}{6}\leq 2k\pi+\frac{3\pi}{2}, k\in Z,$

得 $k\pi+\frac{\pi}{6}\leq x\leq k\pi+\frac{2\pi}{3}, k\in Z,$

即函数的单调递减区间为 $[k\pi+\frac{\pi}{6}, k\pi+\frac{2\pi}{3}] (k\in Z)$.

20. 已知函数 $f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x+\sin^2 x-\cos^2 x,$

- (1) 求 $f(x)$ 的值域;
- (2) 说明怎样由 $y=\sin x$ 的图象得到 $f(x)$ 的图象.



【考点】 函数 $y=A\sin(\omega x+\phi)$ 的图象变换；三角函数中的恒等变换应用.

【分析】 (1) 利用三角函数恒等变换的应用化简函数解析式可得 $f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$, 利用正弦函数的性质可求值域.

(2) 由条件根据函数 $y=A\sin(\omega x+\phi)$ 的图象变换规律, 可得结论.

【解答】 解: (1) $\because f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x+\sin^2 x-\cos^2 x$
 $=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x$
 $=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$,
 \therefore 由 $\sin(2x-\frac{\pi}{6})\in[-1, 1]$, 可得: $f(x)\in[-2, 2]$.

(2) 把 $y=\sin x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 可得函数 $y=\sin(x-\frac{\pi}{6})$ 的图象;
 再把所得图象上的点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 可得函数 $y=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$ 的图象;
 再所得图象上的点的纵坐标变为原来的 2 倍, 横坐标不变, 可得函数 $y=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$ 的图象;

21. 已知 $\alpha, \beta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 且 $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$, $\sin \beta = \frac{5}{13}$,

(1) 求 $\sin(\alpha+\beta)$, 与 $\cos(\alpha-\beta)$ 的值;

(2) 求 $\tan(2\alpha-\beta)$ 的值.

【考点】 两角和与差的正切函数; 两角和与差的余弦函数.

【分析】 (1) 由已知利用同角三角函数基本关系式可求 $\sin \alpha$, $\cos \beta$ 的值, 进而利用两角和的正弦函数公式, 两角差的余弦函数公式即可计算得解.

(2) 由 (1) 利用同角三角函数基本关系式可求 $\tan \alpha$, $\tan \beta$, 利用二倍角的正切函数公式可求 $\tan 2\alpha$ 的值, 进而利用两角差的正切函数公式即可求值得解.

【解答】 解: (1) $\because \alpha, \beta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 且 $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$, $\sin \beta = \frac{5}{13}$,
 $\therefore \sin \alpha = \sqrt{1-\cos^2 \alpha} = \frac{3}{5}$, $\cos \beta = -\sqrt{1-\sin^2 \beta} = -\frac{12}{13}$,



$$\therefore \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \frac{3}{5} \times \left(-\frac{12}{13}\right) + \left(-\frac{4}{5}\right) \times \frac{5}{13} = -\frac{56}{65},$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \left(-\frac{4}{5}\right) \times \left(-\frac{12}{13}\right) + \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{63}{65}.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 可得: } \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{3}{4}, \quad \tan\beta = -\frac{5}{12},$$

$$\text{可得: } \tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = -\frac{24}{7},$$

$$\text{可得: } \tan(2\alpha - \beta) = \frac{\tan 2\alpha - \tan\beta}{1 + \tan 2\alpha \tan\beta} = \frac{-\frac{24}{7} - \left(-\frac{5}{12}\right)}{1 + \left(-\frac{24}{7}\right) \times \left(-\frac{5}{12}\right)} = -\frac{253}{204}.$$

22. 已知函数 $f(x) = 3\sin^2x + a\cos x - \cos^2x + a^2 - 1$,

(1) 判断 $f(x)$ 的奇偶性, 并加以证明;

(2) 求 $f(x)$ 的最大值.

【考点】 三角函数中的恒等变换应用; 正弦函数的图象.

【分析】 (1) 化简函数, 利用偶函数的定义进行证明即可;

(2) 配方, 分类讨论, 求 $f(x)$ 的最大值.

【解答】 解: (1) 偶函数, 证明如下:

$$f(x) = 3\sin^2x + a\cos x - \cos^2x + a^2 - 1 = -4\cos^2x + a\cos x + a^2 + 2$$

$\therefore f(-x) = f(x)$, 函数是偶函数;

$$(2) f(x) = -4\left(\cos x - \frac{a}{8}\right)^2 + \frac{17}{16}a^2 + 2,$$

$$a < -8, f(x)_{\max} = f(-1) = a^2 - a - 2;$$

$$-8 \leq a \leq 8, f(x)_{\max} = f\left(\frac{a}{8}\right) = \frac{17}{16}a^2 + 2;$$

$$a > 8, f(x)_{\max} = f(1) = a^2 + a - 2.$$