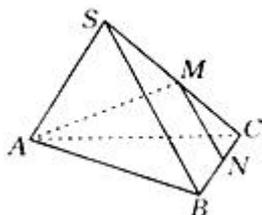


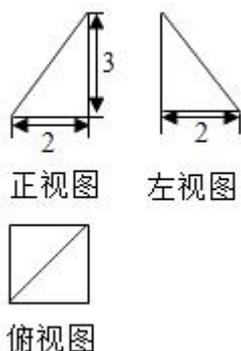


7.如图，在三棱锥  $S-ABC$  中， $M$ 、 $N$  分别是棱  $SC$ 、 $BC$  的中点，且  $MN \perp AM$ ，若  $AB=2\sqrt{2}$ ，则此正三棱锥外接球的体积是（ ）



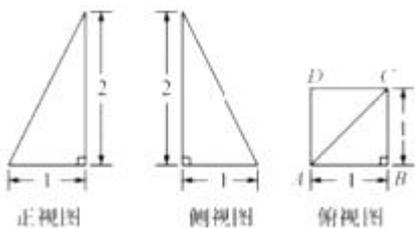
- A.  $12\pi$                       B.  $4\sqrt{3}\pi$                       C.  $\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi$                       D.  $12\sqrt{3}\pi$

8.已知某个几何体的三视图如图所示，根据图中标出的尺寸（单位：cm），可得这个几何体的体积是（ ）



- A.  $\frac{4}{3}\text{cm}^3$                       B.  $\frac{8}{3}\text{cm}^3$                       C.  $2\text{cm}^3$                       D.  $4\text{cm}^3$

9.某四棱锥的三视图如图所示，该四棱锥外接球的体积为（ ）



- A.  $\frac{\sqrt{6}}{3}\pi$                       B.  $\frac{\sqrt{6}}{2}\pi$                       C.  $\sqrt{6}\pi$                       D.  $3\sqrt{6}\pi$

10.若过点  $M(1, 1)$  的直线  $l$  与圆  $(x-2)^2+y^2=4$  相较于两点  $A, B$ ，且  $M$  为弦的中点  $AB$ ，则  $|AB|$  为（ ）

- A.  $2\sqrt{2}$                       B. 4                      C.  $\sqrt{2}$                       D. 2

11.关于空间直角坐标系  $O-xyz$  中的一点  $P(1, 2, 3)$ ，有下列说法：

- ①点  $P$  到坐标原点的距离为  $\sqrt{13}$ ；
- ②  $OP$  的中点坐标为  $(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2})$ ；
- ③点  $P$  关于  $x$  轴对称的点的坐标为  $(-1, -2, -3)$ ；
- ④点  $P$  关于坐标原点对称的点的坐标为  $(1, 2, -3)$ ；
- ⑤点  $P$  关于坐标平面  $xOy$  对称的点的坐标为  $(1, 2, -3)$ 。

其中正确的个数是（ ）

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

12.若三棱锥  $P-ABC$  中,  $AB=AC=1$ ,  $AB \perp AC$ ,  $PA \perp$  平面  $ABC$ , 且直线  $PA$  与平面  $PBC$  所成角的正切值为  $\frac{1}{2}$ , 则三棱锥  $P-ABC$  的外接球的表面积为 ( )

A.  $4\pi$

B.  $8\pi$

C.  $16\pi$

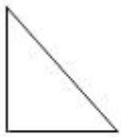
D.  $32\pi$

## 二.填空题

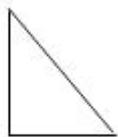
13.若正三棱柱的所有棱长均为  $a$ , 且其体积为  $16\sqrt{3}$ , 则  $a=$ \_\_\_\_\_.

14.在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $AD_1$  与  $BD$  所成的角是\_\_\_\_\_.

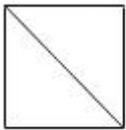
15.已知一个多面体的三视图如图所示: 其中正视图与侧视图都是边长为 1 的等腰直角三角形, 俯视图是边长为 1 的正方形, 若该多面体的顶点都在同一个球面上, 则该球的表面积为\_\_\_\_\_.



正(主)视图



侧(左)视图



俯视图

16.如果曲线  $2|x| - y - 4 = 0$  与曲线  $x^2 + \lambda y^2 = 4$  ( $\lambda < 0$ ) 恰好有两个不同的公共点, 则实数  $\lambda$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

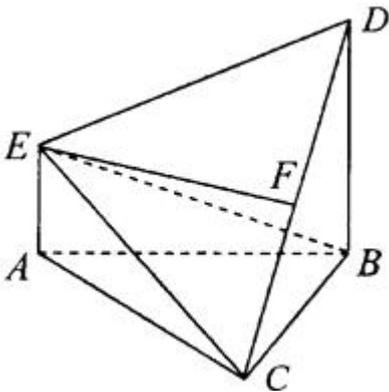
## 三.解答题

17.曲线  $C: \rho^2 - 2\rho\cos\theta - 8 = 0$  曲线  $E: \begin{cases} x = t + 2 \\ y = kt + 1 \end{cases}$  ( $t$  是参数)

(1) 求曲线  $C$  的普通方程, 并指出它是什么曲线.

(2) 当  $k$  变化时指出曲线  $K$  是什么曲线以及它恒过的定点并求曲线  $E$  截曲线  $C$  所得弦长的最小值.

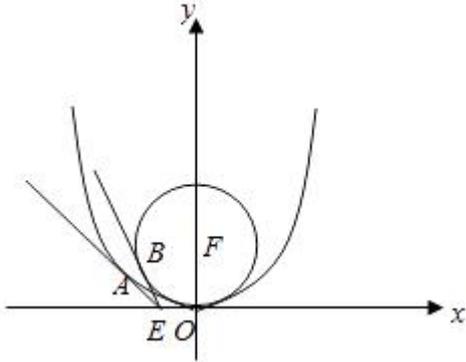
18.如图, 在多面体  $ABCDE$  中,  $DB \perp$  平面  $ABC$ ,  $AE \parallel DB$ , 且  $\triangle ABC$  是边长为 2 的等边三角形,  $AE=1$ ,  $CD$  与平面  $ABDE$  所成角的正弦值为  $\frac{\sqrt{6}}{4}$ .



(1) 若  $F$  是线段  $CD$  的中点, 证明:  $EF \perp$  面  $DBC$ ;

(2) 求二面角  $D-EC-B$  的平面角的余弦值.

19. 如图所示，抛物线  $C: x^2=2py$  ( $p>0$ )，其焦点为  $F$ ， $C$  上的一点  $M(4, m)$  满足  $|MF|=4$ .



- (1) 求抛物线  $C$  的标准方程；
- (2) 过点  $E(-1, 0)$  作不经过原点的两条直线  $EA$ ， $EB$  分别与抛物线  $C$  和圆  $F: x^2+(y-2)^2=4$  相切于点  $A$ ， $B$ ，试判断直线  $AB$  是否经过焦点  $F$ 。

## 答案解析部分

### 一. <b>选择题</b>

#### 1. 【答案】 C

【考点】 直线的斜率

【解析】 【解答】 解：  $\because$  点  $(-3, -1)$  和  $(4, -6)$  在直线  $3x - 2y - a = 0$  的两侧，

$$\therefore (-9 + 2 - a)(12 + 12 - a) < 0,$$

$$\text{化为 } (a + 7)(a - 24) < 0,$$

$$\text{解得 } -7 < a < 24.$$

故答案为： C.

【分析】 根据题意可知，把两个点代入直线方程可得  $(-9 + 2 - a)(12 + 12 - a) < 0$ ，解出  $a$  的值即可。

#### 2. 【答案】 D

【考点】 空间中直线与平面之间的位置关系

【解析】 【解答】 解：若  $m \parallel \alpha$ ， $n \parallel \beta$ ， $m \perp n$ ，则  $\alpha \perp \beta$  或  $\alpha \parallel \beta$ ，故不正确；

若  $m \parallel n$ ， $n \parallel \alpha$ ， $\alpha \parallel \beta$ ，则  $m \parallel \beta$  或  $m \subset \beta$ ，故不正确；

若  $\alpha \perp \beta$ ， $\alpha \cap \beta = n$ ， $m \perp n$ ，则  $m \perp \alpha$ ，不正确，缺少条件  $m \subset \beta$ ，故不正确；

若  $\alpha \cap \beta = n$ ， $m \parallel \alpha$ ， $m \parallel \beta$ ，根据线面平行的判定与性质，可得  $m \parallel n$ ，正确。

故答案为： D.

【分析】 根据空间内两条直线的位置关系以及线面平行、垂直的性质定理可得结果。

#### 3. 【答案】 B

【考点】 由三视图求面积、体积

【解析】 【解答】 解：由三视图可知，该几何体的左边是底面面积为 16，高为 3 的四棱锥，

右边为半个圆锥，且其底面半径为 2，高为 3，故体积为  $\frac{1}{3} \times 16 \times 3 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \pi \times 4 \times 3 = 16 + 2\pi$ ，

故答案为： B.

【分析】 由三视图可知，该几何体的左边是四棱锥，右边为半个圆锥，故体积为半个圆锥加上一个四棱锥的体积之和。

#### 4. 【答案】 D

【考点】 由三视图求面积、体积

【解析】 【解答】 解：该几何体为一个长方体挖去两个圆锥所得到的几何体，

$$\text{体积为 } 4 \times 4 \times 6 - \frac{1}{3} \pi \times 1^2 \times 3 \times 2 = 96 - 2\pi,$$

故答案为： D.

【分析】 由三视图观察可得该几何体为一个长方体挖去两个圆锥，故体积为长方体的体积减去两个圆锥的体积之差。

5. 【答案】 A

【考点】 直线的斜截式方程

【解析】 【解答】 解： 根据题意， 设直线  $mx + \frac{n}{2}y - 1 = 0$  为直线  $l$ ，

另一直线的方程为  $\sqrt{3}x - y - 3\sqrt{3} = 0$ ，

变形可得  $y = \sqrt{3}(x - 3)$ ， 其斜率  $k = \sqrt{3}$ ，

则其倾斜角为  $60^\circ$ ，

而直线  $l$  的倾斜角是直线  $\sqrt{3}x - y - 3\sqrt{3} = 0$  的倾斜角的 2 倍，

则直线  $l$  的倾斜角为  $120^\circ$ ，

且斜率  $k = \tan 120^\circ = -\sqrt{3}$ ，

又由  $l$  在  $y$  轴上的截距是  $-1$ ， 则其方程为  $y = -\sqrt{3}x - 1$ ；

又由其一般式方程为  $mx + \frac{n}{2}y - 1 = 0$ ，

分析可得：  $m = -\sqrt{3}$ ，  $n = -2$ ；

故答案为： A.

【分析】 根据直线方程  $\sqrt{3}x - y - 3\sqrt{3} = 0$  可得其倾斜角为  $60^\circ$ ， 则另一根直线的倾斜角为  $120^\circ$ ， 其斜率为  $-\sqrt{3}$ ， 根据在  $y$  轴上的截距为  $-1$ ， 可得出其直线方程， 从而可得出  $m$ ，  $n$  的值.

6. 【答案】 B

【考点】 直线的斜率， 两条直线的交点坐标

【解析】 【解答】 解： 联立两直线方程得： 
$$\begin{cases} y = kx - \sqrt{3} & \text{①} \\ 2x + 3y - 6 = 0 & \text{②} \end{cases}$$

将①代入②得：  $x = \frac{3\sqrt{3}+6}{2+3k}$  ③， 把③代入①， 求得  $y = \frac{6k-2\sqrt{3}}{2+3k}$ ，

所以两直线的交点坐标为  $(\frac{3\sqrt{3}+6}{2+3k}, \frac{6k-2\sqrt{3}}{2+3k})$ ，

因为两直线的交点在第一象限， 所以得到 
$$\begin{cases} \frac{3\sqrt{3}+6}{2+3k} > 0 & \text{①} \\ \frac{6k-2\sqrt{3}}{2+3k} > 0 & \text{②} \end{cases}$$

由①解得：  $k > -\frac{2}{3}$ ； 由②解得  $k > \frac{\sqrt{3}}{3}$  或  $k < -\frac{2}{3}$ ， 所以不等式的解集为：  $k > \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

设直线  $l$  的倾斜角为  $\theta$ ， 则  $\tan\theta > \frac{\sqrt{3}}{3}$ ， 所以  $\theta \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$ 。

故答案为： B.

【分析】首先求出两条直线的交点，根据题意交点在第一象限，即得  $x>0, y<0$ . 求出  $k$  的取值范围，再根据直线的斜率为  $k=\tan\theta$  即得  $\tan\theta>\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，直线的倾斜角在  $[0, \pi)$  进而得到  $\theta$  的取值范围。

7. 【答案】 B

【考点】球的体积和表面积，直线与平面垂直的判定

【解析】 【解答】解：  $\because$  三棱锥  $S-ABC$  正棱锥，  $\therefore SB\perp AC$  (对棱互相垂直)  $\therefore MN\perp AC$   
又  $\because MN\perp AM$  而  $AM\cap AC=A$ ，  $\therefore MN\perp$  平面  $SAC$  即  $SB\perp$  平面  $SAC$   
 $\therefore \angle ASB=\angle BSC=\angle ASC=90^\circ$ ，将此三棱锥补成正方体，则它们有相同的外接球。

$\therefore$  侧棱长为：2，

$$\therefore R = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3},$$

$$\therefore \text{正三棱锥外接球的体积是 } \frac{4\pi}{3} R^3 = 4\sqrt{3}\pi.$$

故答案为： B.

【分析】首先证明将此三棱锥补成正方体，则它们有相同的外接球，进而求出正方体的外接球即可。根据题意可得  $R$  的值，利用球的体积公式可求出结果。

8. 【答案】 D

【考点】由三视图求面积、体积，棱柱、棱锥、棱台的体积

【解析】 【解答】解：由已知中的三视图，可得：该几何体是一个以俯视图为底面的四棱锥，其底面的面积  $S=2\times 2=4\text{cm}^2$ ，

高  $h=3\text{cm}$ ，

$$\text{故三棱锥的体积 } V = \frac{1}{3}Sh = 4\text{cm}^3，$$

故答案为： D

【分析】由已知的三视图可得：该几何体是一个四棱锥，根据四棱锥的体积公式求得即可。

9. 【答案】 C

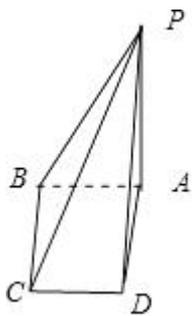
【考点】由三视图求面积、体积

【解析】 【解答】解：由三视图可知：该几何体为四棱锥  $P-ABCD$ 。其中  $PA\perp$  底面  $ABCD$ ， $PA=2$ ，底面是边长为 1 的正方形。

$$\therefore \text{该四棱锥外接球的直径为 } PC = \sqrt{1^2 \times 2 + 2^2} = \sqrt{6}.$$

$$\therefore \text{该四棱锥外接球的体积 } V = \frac{4\pi}{3} \times \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3 = \sqrt{6}\pi.$$

故答案为： C.



【分析】由已知的三视图可知：该几何体为四棱锥  $P-ABCD$ ，根据题意该四棱锥外接球可等价于边长为 1 的正方体的外接球，故外接球的直径为  $PC$  正方体的体对角线，利用球的体积公式求出结果。

10. 【答案】A

【考点】直线与圆的位置关系

【解析】【解答】解：圆  $(x-2)^2+y^2=4$  的圆心为  $C(2, 0)$ ，半径为 2，则  $|CM| = \sqrt{2}$ ， $CM \perp AB$ ，

$$\therefore |AB| = 2\sqrt{4-2} = 2\sqrt{2}$$

故答案为：A.

【分析】根据弦长的一半、圆的半径、圆心到直线的距离构成的直角三角形，利用勾股定理可求出  $|AB|$  的值。

11. 【答案】A

【考点】空间中的点的坐标

【解析】【解答】解：由空间直角坐标系  $O-xyz$  中的一点  $P(1, 2, 3)$ ，知：

在①中，点  $P$  到坐标原点的距离为  $d = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$ ，故①错误；

在②中，由中点坐标公式得， $OP$  的中点坐标为  $(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2})$ ，故②正确；

在③中，由对称的性质得与点  $P$  关于  $x$  轴对称的点的坐标为  $(1, -2, -3)$ ，故③不正确；

在④中，由对称的性质得与点  $P$  关于坐标原点对称的点的坐标为  $(-1, -2, -3)$ ，故④错误；

在⑤中，由对称的性质得与点  $P$  关于坐标平面  $xOy$  对称的点的坐标为  $(1, 2, -3)$ ，故⑤正确。

故答案为：A.

【分析】利用空间直角坐标系内的点的特点可求出结论。

12. 【答案】A

【考点】球的体积和表面积

【解析】【解答】解：如图，取  $BC$  中点  $D$ ，连结  $AD$ 、 $PD$ ，

$\because AB=AC$ ， $\therefore AD \perp BC$ ，由因为  $PA \perp$  面  $ABC$ ， $\therefore BC \perp$  面  $PAD$ ，

过  $A$  作  $AH \perp PD$  于  $D$ ，易知  $AH \perp$  面  $PBC$ ，

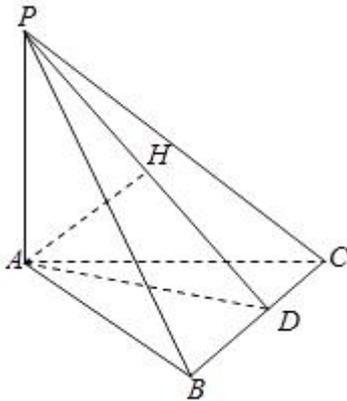
$\therefore \angle APD$  就是直线  $PA$  与平面  $PBC$  所成角， $\therefore \tan \angle APD = \frac{AD}{AP} = \frac{1}{2}$ ，

$\because AD = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $\therefore PA = \sqrt{2}$ 。

$\because AB, AC, AP$  相互垂直， $\therefore$  以  $AB, AC, AP$  为棱的长方体的外接球就是三棱锥  $P-ABC$  的外接球，

∴三棱锥 P - ABC 的外接球的半径  $R = \frac{\sqrt{1^2+1^2+(\sqrt{2})^2}}{2} = 1$ ，三棱锥 P - ABC 的外接球的表面积为  $4\pi R^2=4\pi$ ；

故答案为：A.



【分析】首先证明以 AB，AC，AP 为棱的长方体的外接球就是三棱锥 P - ABC 的外接球，外接球的半径 R 等于体对角线的一半，再根据球的表面积公式求出结果。

二.<b>填空题</b>

13. 【答案】 4

【考点】棱柱、棱锥、棱台的体积

【解析】【解答】解：由题意可得，正棱柱的底面是变长等于 a 的等边三角形，面积为  $\frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 60^\circ$ ，正棱柱的高为 a，

$$\therefore \left( \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 60^\circ \right) \cdot a = 16\sqrt{3}, \therefore a = 4,$$

故答案为：4.

【分析】根据已知，利用正棱柱的特点求出其体积为  $\left( \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 60^\circ \right) \cdot a = 16\sqrt{3}$ ，进而求出  $a = 4$ 。

14. 【答案】  $60^\circ$

【考点】异面直线及其所成的角

【解析】【解答】解：如图，连结  $BC_1$ 、BD 和  $DC_1$ ，

在正方体 ABCD -  $A_1B_1C_1D_1$  中，

由  $AB = D_1C_1$ ， $AB \parallel D_1C_1$ ，可知  $AD_1 \parallel BC_1$ ，

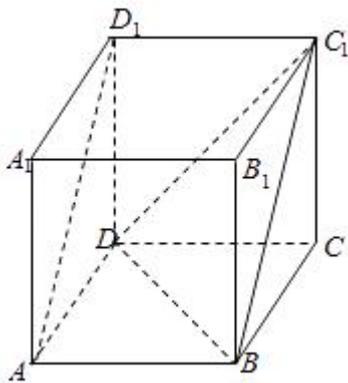
所以  $\angle DBC_1$  就是异面直线  $AD_1$  与 BD 所成角，

在正方体 ABCD -  $A_1B_1C_1D_1$  中， $BC_1$ 、BD 和  $DC_1$  是其三个面上的对角线，它们相等。

所以  $\triangle DBC_1$  是正三角形， $\angle DBC_1 = 60^\circ$

故异面直线  $AD_1$  与 BD 所成角的大小为  $60^\circ$ 。

故答案为  $60^\circ$ 。



【分析】首先根据已知找到异面直线所成的角为 $\angle DBC_1$ ，再利用正方体的特点可证明 $\triangle DBC_1$ 是正三角形， $\angle DBC_1=60^\circ$ ，即得结果。

15. 【答案】 $3\pi$

【考点】由三视图求面积、体积

【解析】【解答】解：由已知中的三视图可得，该几何体是一个以俯视图为底面的四棱锥，其底面为边长为1的正方形，高为1，一条侧棱垂直底面，

将其扩充为正方体，对角线长为 $\sqrt{3}$ ， $\therefore$ 外接球的直径为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

$\therefore$ 球的表面积为 $4\pi \cdot \frac{3}{4}=3\pi$ 。

故答案为： $3\pi$ 。

【分析】由已知中的三视图可得，该几何体是一个四棱锥，它的外接球即为一个正方体的外接球，半径为正方体的体对角线的一半，再根据球的表面积公式可求得结果。

16. 【答案】 $[-\frac{1}{4}, 0)$

【考点】曲线与方程

【解析】【解答】解：由 $2|x| - y - 4=0$ 可得 $y=2|x| - 4$ ，

当 $x \geq 0$ 时， $y=2x - 4$ ；当 $x < 0$ 时， $y= - 2x - 4$ ，

$\therefore$ 函数 $y=2|x| - 4$ 的图象与方程 $x^2+\lambda y^2=4$ 的曲线必相交于 $(\pm 2, 0)$

$\therefore$ 为了使函数 $y=2|x| - 4$ 的图象与方程 $x^2+\lambda y^2=1$ 的曲线恰好有两个不同的公共点，

则 $y=2x - 4$ 代入方程 $x^2+\lambda y^2=1$ ，整理可得 $(1+4\lambda)x^2 - 16\lambda x+16\lambda - 4=0$ ，

当 $\lambda = -\frac{1}{4}$ 时， $x=2$ 满足题意，由于 $\Delta > 0$ ，2是方程的根， $\therefore \frac{16\lambda-4}{1+4\lambda} < 0$ ，

解得 $-\frac{1}{4} < \lambda < \frac{1}{4}$ 时，方程两根异号，满足题意；

$y= - 2x - 4$ 代入方程 $x^2+\lambda y^2=1$ ，整理可得 $(1+4\lambda)x^2+16\lambda x+16\lambda - 4=0$

当 $\lambda = -\frac{1}{4}$ 时， $x= - 2$ 满足题意，由于 $\Delta > 0$ ， $-1$ 是方程的根， $\therefore \frac{16\lambda-4}{1+4\lambda} < 0$ ，

解得 $-\frac{1}{4} < \lambda < \frac{1}{4}$ 时，方程两根异号，满足题意；

$\therefore \lambda < 0$ ， $\therefore$ 实数 $\lambda$ 的取值范围是 $[-\frac{1}{4}, 0)$ 。

故答案为  $[-\frac{1}{4}, 0)$  .

【分析】首先去绝对值符号分别讨论：当  $x \geq 0$  时， $y = 2x - 4$  和当  $x < 0$  时， $y = -2x - 4$ ，两种情况下联立直线与曲线的方程得到关于含有  $\lambda$  的二次方程的根的情况。

三.<b>解答题</b>

17. 【答案】 (1) 解：∵ 曲线 C:  $\rho^2 - 2\rho\cos\theta - 8 = 0$ ,

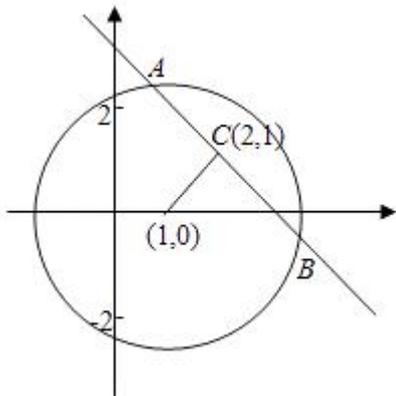
$$\therefore x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0,$$

$$\therefore (x - 1)^2 + y^2 = 9,$$

表示圆心  $(1, 0)$  半径为 3 的圆

(2) 解：曲线 E:  $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = kt + 1 \end{cases}$  消去参数得  $y - 1 = k(x - 2)$  是一条恒过定点  $(2, 1)$  的直线 (但不包括  $x = 2$ )，当直线 E 与圆心连线垂直时弦长最小，

设圆心到直线 E 的距离为  $d$ ，则  $d = \sqrt{2}$ ，所以弦长的最小值  $= 2\sqrt{9 - 2} = 2\sqrt{7}$

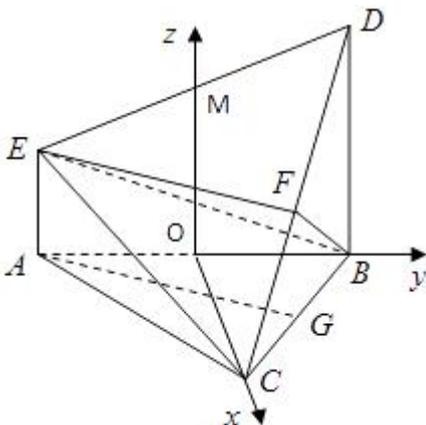


【考点】简单曲线的极坐标方程，参数方程化成普通方程

【解析】【分析】1、根据极坐标与直角坐标的公式转化可得  $x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$ ，整理可得  $(x - 1)^2 + y^2 = 9$ 。

2、首先消去参数可得， $y - 1 = k(x - 2)$  是一条恒过定点  $(2, 1)$  的直线，由题意可知当直线 E 与圆心连线垂直时弦长最小，利用圆的半径、弦长的一半、圆心到直线的距离构成的直角三角形可求出弦长的值。

18. 【答案】 (1) 证明：取 AB 的中点 O，连结 OC，OD.



∵  $DB \perp$  平面 ABC， $DB \subset$  面 ABD，根据直线和平面垂直的判定定理得，面  $ABD \perp$  平面 ABC.

取 AB 的中点 O，连结 OC，OD.

$\because \triangle ABC$  是等边三角形， $\therefore OC \perp AB$ ,

根据平面和平面垂直的性质定理得则  $OC \perp$  面  $ABD$ ,

$\therefore OD$  是  $CD$  在平面  $ABDE$  上的射影，

$\therefore \angle CDO$  即是  $CD$  与平面  $ABDE$  所成角.

$$\therefore \sin \angle CDO = \frac{OC}{CD} = \frac{\sqrt{6}}{4}, \text{ 而 } OC = \sqrt{3},$$

$$\therefore CD = 2\sqrt{2}, \therefore BD = 2.$$

取  $ED$  的中点为  $M$ ，以  $O$  为原点， $OC$  为  $x$  轴， $OB$  为  $y$  轴， $OM$  为  $z$  轴建立如图空间直角坐标系，则  $A(0,$

$$-1, 0), C(\sqrt{3}, 0, 0), B(0, 1, 0), D(0, 1, 2), E(0, -1, 1), F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 1\right),$$

取  $BC$  的中点为  $G$ ，则  $G\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ ，则  $AG \perp$  面  $BCD$ ，因为  $\overrightarrow{EF} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$ ， $\overrightarrow{AG} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$ ，

所以  $\overrightarrow{EF} \parallel \overrightarrow{AG}$ ，所以  $EF \perp$  面  $DBC$ .

(2) 解：由上面知： $BF \perp$  面  $DEC$ ，

$$\text{又 } \overrightarrow{BF} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right),$$

取平面  $DEC$  的一个法向量  $\vec{n} = (\sqrt{3}, -1, 2)$

设平面  $BCE$  的一个法向量  $\vec{m} = (x, y, z)$ ，则  $\begin{cases} \overrightarrow{CE} \cdot \vec{m} = 0 \\ \overrightarrow{CB} \cdot \vec{m} = 0 \end{cases}$

$$\text{又 } \overrightarrow{CE} = (-\sqrt{3}, -1, 1), \overrightarrow{CB} = (-\sqrt{3}, 1, 0),$$

$$\text{所以 } \begin{cases} -\sqrt{3}x - y + z = 0 \\ -\sqrt{3}x + y = 0 \end{cases}, \text{ 令 } x=1, \text{ 则 } y = \sqrt{3}, z = 2\sqrt{3}.$$

由此得平面  $BCE$  的一个法向量  $\vec{m} = (1, \sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ .

$$\text{则 } \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{4\sqrt{3}}{4 \times 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}, \text{ 所以二面角 } D-EC-B \text{ 的平面角的余弦值为 } \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

**【考点】** 直线与平面垂直的判定，用空间向量求平面间的夹角，二面角的平面角及求法

**【解析】** **【分析】** 1、根据题意作出辅助线：取  $AB$  的中点  $O$ ，连结  $OC$ ， $OD$ 。利用直线和平面垂直的判定定理得，面  $ABD \perp$  平面  $ABC$ ，再由已知  $\triangle ABC$  是等边三角形，可得  $OC \perp AB$ ，利用线面垂直的性质定理可得

$OC \perp$  面  $ABD$ ， $\angle CDO$  即是  $CD$  与平面  $ABDE$  所成角，进而求出  $CD = 2\sqrt{2}$ ， $BD = 2$ 。建立如图空间直角坐标系，

根据向量的线性运算可得证， $EF \parallel AG$  故  $EF \perp$  面  $DBC$ 。

2、在建立如图空间直角坐标系内取平面  $DEC$  的一个法向量  $\vec{n}$ ，设平面  $BCE$  的一个法向量  $\vec{m}$ ，根据

向量的垂直关系，令  $x=1$ ，则  $y=\sqrt{3}$ ， $z=2\sqrt{3}$ ，由此得平面 BCE 的一个法向量  $\vec{m}=(1, \sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ ，利用数量积的运算公式求出  $\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle$  的值。

19. 【答案】 (1) 解：抛物线 C 的准线方程为  $y = -\frac{p}{2}$ ，

$$\therefore |MF| = m + \frac{p}{2} = 4,$$

由 M (4, m) 在椭圆上，

$$\therefore 16 = 2pm,$$

$$\therefore p^2 - 8p + 16 = 0, \text{ 解得 } p = 4,$$

$\therefore$  抛物线 C 的标准方程为  $x^2 = 8y$

(2) 解：设 EA:  $x = ky - 1$ ，联立  $\begin{cases} x = ky - 1 \\ x^2 = 8y \end{cases}$ ，消去 x 得： $k^2y^2 - (2k+8)y + 1 = 0$ ，

$\therefore$  EA 与 C 相切，

$$\therefore \Delta = (2k+8)^2 - 4k^2 = 0, \text{ 解得 } k = -2,$$

$$\therefore y_A = \frac{1}{2}, x_A = -2, \text{ 求得 } A(-2, \frac{1}{2}),$$

设 EB:  $x = ty - 1$ ，联立  $\begin{cases} x = ty - 1 \\ x^2 + (y-2)^2 = 4 \end{cases}$ ，消去 x 得： $(t^2+1)y^2 - (2t+4)y + 1 = 0$ ，

$\therefore$  EB 与圆 F 相切，

$$\therefore \Delta = (2t+4)^2 - 4(t^2+1) = 0, \text{ 即 } t = -\frac{3}{4},$$

$$\therefore y_B = \frac{4}{5}, x_B = -\frac{8}{5}, \text{ 求得 } B(-\frac{8}{5}, \frac{4}{5}),$$

$$\therefore \text{直线 AB 的斜率 } k_{AB} = \frac{3}{4},$$

可得直线 AB 的方程为  $y = \frac{3}{4}x + 2$ ，经过焦点 F (0, 2)

【考点】抛物线的简单性质

【解析】 【分析】 1、利用抛物线的定义可得  $m + \frac{p}{2} = 4$ ，点 M (4, m) 在椭圆上，所以  $16 = 2pm$ ，即可求出  $p = 4$ ，进而得到抛物线 C 的标准方程为  $x^2 = 8y$ 。

2、首先联立直线与抛物线的方程，根据题意令  $\Delta = 0$ ，求得  $k = -2$ ，即得点 A 的坐标；同理可得点 B 的坐标，进而得到直线 AB 的斜率  $k_{AB}$  的值，从而求出直线的方程，并可判断其经过焦点 F (0, 2)。