

2013—2014 学年度上学期期末考试高一年级数学科试卷
参考答案及评分标准

说明:

一、本解答给出了一种或几种解法供参考,如果考生的解法与本题解答不同,可根据试题的主要考查内容比照评分标准制订相应的评分细则。

二、对计算题,当考生的解答在某一步出现错误时,如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度,可视影响的程度决定后继部分的给分;如果后继部分的解答有较重的错误,就不再给分。

三、解答右端所注分数,表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

第I卷 选择题 (共 60 分)

一、选择题 (本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分)

ADDDBD CAAAD DA

第II卷 非选择题 (共 90 分)

二、填空题 (本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分) 把答案直接写在横线上。

13. 0

14. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ 或 $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 2$

15. $\{m | m \geq 1\}$

16. $10(1 + \frac{\sqrt{21}}{3})$

三、17. (本小题满分 10 分)

$$\begin{aligned} \text{解: } f(a) + f(1-a) &= \frac{4^a}{4^a + 2} + \frac{4^{1-a}}{4^{1-a} + 2} \\ &= \frac{4^a}{4^a + 2} + \frac{4}{4 + 2 \cdot 4^a} = \frac{4^a}{4^a + 2} + \frac{2}{4^a + 2} = 1. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$(2) \quad f\left(\frac{1}{2013}\right) + f\left(\frac{2}{2013}\right) + \dots + f\left(\frac{2012}{2013}\right) = 1 \times 1006 = 1006. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

18. (本小题满分 12 分)

解: (1) 设 $B(x, y)$, 则 AB 中点 $\left(\frac{x+3}{2}, \frac{y-1}{2}\right)$,

$$\text{由 } \begin{cases} 6 \cdot \frac{x+3}{2} + 10 \cdot \frac{y-1}{2} - 59 = 0 \\ x - 4y + 10 = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x = 10 \\ y = 5 \end{cases}, \text{ 故 } B(10, 5). \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

(2) 设点 A 关于直线 $x-4y+10=0$ 的对称点为 $A'(x,y)$,

$$\text{则} \begin{cases} \frac{x+3}{2} - 4 \cdot \frac{y-1}{2} + 10 = 0 \\ \frac{y+1}{x-3} = -4 \end{cases}, \text{得} \begin{cases} x=1 \\ y=7 \end{cases}, \text{即 } A'(1,7),$$

直线 BC 经过点 A' 和点 B , 故直线 BC 的方程 $2x+9y-65=0$12 分

19. (本小题满分 12 分)

(1) 证明: 依题意: $AD \perp BD$

$$\because CE \perp \text{平面 } ABD \quad \therefore CE \perp AD$$

$$\because BD \cap CE = E \quad \therefore AD \perp \text{平面 } BCE. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) 证明: $Rt\triangle BCE$ 中, $CE = \sqrt{2}$, $BC = \sqrt{6}$ $\therefore BE = 2$

$$Rt\triangle ABD \text{ 中, } AB = 2\sqrt{3}, AD = \sqrt{3} \quad \therefore BD = 3.$$

$$\therefore \frac{BF}{BA} = \frac{BE}{BD} = \frac{2}{3} \quad \therefore AD \parallel EF$$

$\because AD$ 在平面 CEF 外, EF 在平面 CEF 内,

$$\therefore AD \parallel \text{平面 } CEF. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

(3) 解: 由 (2) 知 $AD \parallel EF$, $AD \perp ED$, 且 $ED = BD - BE = 1$

$$\therefore F \text{ 到 } AD \text{ 的距离等于 } E \text{ 到 } AD \text{ 的距离为 } 1. \quad S_{\triangle FAD} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\because CE \perp \text{平面 } ABD$$

$$\therefore V_{A-CFD} = V_{C-AFD} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle FAD} \cdot CE = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{6}. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

20. (本小题满分 12 分)

解: (1) 因为 B, C, D 表示的函数在区间 $[0.5, 8]$ 上是单调的, 所以用 A 来模拟比较合适.

.....2 分

(2) 因为人均 GDP 为 1 千美元时, 年人均 M 饮料的销售量为 2 升; 若人均 GDP 为 4 千美元时, 年人均 M 饮料的销售量为 5 升, 把 $x = 1, y = 2; x = 4, y = 5$ 代入 (A) 函数

$$f(x) = ax^2 + bx, \text{ 得 } \begin{cases} 2 = a + b \\ 5 = 16a + 4b \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = \frac{9}{4} \end{cases}$$

所以所求函数的解析式为 $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{9}{4}x$ ($x \in [0.5, 8]$)7 分

(3) 根据题意可得:

当 $x \in [0.5, 3]$ 时, $y = -\frac{19}{80}[(x - \frac{9}{2})^2 - \frac{81}{4}]$, 在 $x \in [0.5, 3]$ 上递增,

则当 $x = 3$ 时, $y_{\max} = \frac{171}{40}$;

当 $x \in (3, 6)$ 时, $y = -\frac{9}{40}[(x - \frac{9}{2})^2 - \frac{81}{4}]$, $\frac{9}{2} \in (3, 6)$, 则当 $x = \frac{9}{2}$ 时, $y_{\max} = \frac{729}{160}$;

当 $x \in [6, 8]$ 时, $y = -\frac{19}{80}[(x - \frac{9}{2})^2 - \frac{81}{4}]$, 在 $x \in [6, 8]$ 上递减,

则当 $x = 6$ 时, $y_{\max} = \frac{171}{40}$;

显然 $\frac{729}{160} > \frac{171}{40}$,

所以当人均 GDP 在 4.5 千美元的地区, 人均 M 饮料的销量最多为 $\frac{729}{160}$ 升.

.....12 分

21. (本小题满分 12 分)

解: 由题意圆心 $M(2, 2)$, 半径 $r = \frac{\sqrt{34}}{2}$, 设 $A(9 - a, a)$,

因为直线 AC 和圆 M 相交或相切, 所以 M 到 AC 的距离 $d \leq r$,

而 $d = \frac{\sqrt{2}}{2} |AM|$, 因此 $\frac{\sqrt{2}}{2} |AM| \leq r$,6 分

$$\text{即 } \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{(7-a)^2 + (a-2)^2} \leq \frac{\sqrt{34}}{2} \Rightarrow a^2 - 9a + 18 \leq 0$$

解得 $3 \leq a \leq 6$ ，故点 A 的纵坐标的取值范围是 $[3, 6]$ 。……………12 分

22. (本小题满分 12 分)

解：(1) 因为 $y = f(x)$ 为偶函数，所以 $f(-x) = f(x)$ ，

即 $\log_9(9^{-x} + 1) - kx = \log_9(9^x + 1) + kx$ 对于任意 x 恒成立.

于是 $2kx = \log_9(9^{-x} + 1) - \log_9(9^x + 1) = \log_9 \frac{9^x + 1}{9^x} - \log_9(9^x + 1) = -x$ 恒成立,

而 x 不恒为零，所以 $k = -\frac{1}{2}$ 。……………4 分

(2) 由题意知方程 $\log_9(9^x + 1) - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x + b$ 即方程 $\log_9(9^x + 1) - x = b$ 无解.

令 $g(x) = \log_9(9^x + 1) - x$ ，则函数 $y = g(x)$ 的图象与直线 $y = b$ 无交点.

因为 $g(x) = \log_9 \frac{9^x + 1}{9^x} = \log_9(1 + \frac{1}{9^x})$ ，由 $1 + \frac{1}{9^x} > 1$ ，则 $g(x) = \log_9(1 + \frac{1}{9^x}) > 0$ ，

所以 b 的取值范围是 $(-\infty, 0]$ 。……………8 分

(3) 由题意知方程 $3^x + \frac{1}{3^x} = a \cdot 3^x - \frac{4}{3}a$ 有且只有一个实数根.

令 $3^x = t > 0$ ，则关于 t 的方程 $(a-1)t^2 - \frac{4}{3}at - 1 = 0$ (记为(*))有且只有一个正根.

若 $a = 1$ ，则 $t = -\frac{3}{4}$ ，不合题意，舍去；

若 $a \neq 1$ ，则方程(*)的两根异号或有两相等正根.

由 $\Delta = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$ 或 -3 ；但 $a = \frac{3}{4} \Rightarrow t = -\frac{1}{2}$ ，不合题意，舍去；而 $a = -3 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$ ；

若方程(*)的两根异号 $\Leftrightarrow (a-1) \cdot (-1) < 0 \Leftrightarrow a > 1$

综上所述，实数 a 的取值范围是 $\{-3\} \cup (1, +\infty)$ 。……………12 分