

---

## 题型练 7 大题专项(五)

### 解析几何综合问题

1. 已知椭圆  $C: x^2 + 3y^2 = 3$ , 过点  $D(1,0)$  且不过点  $E(2,1)$  的直线与椭圆  $C$  交于  $A, B$  两点, 直线  $AE$  与直线  $x=3$  交于点  $M$ .

- (1) 求椭圆  $C$  的离心率;
- (2) 若  $AB$  垂直于  $x$  轴, 求直线  $BM$  的斜率;
- (3) 试判断直线  $BM$  与直线  $DE$  的位置关系, 并说明理由.

2. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$  过  $A(2,0), B(0,1)$  两点.

- (1) 求椭圆  $C$  的方程及离心率;
- (2) 设  $P$  为第三象限内一点且在椭圆  $C$  上, 直线  $PA$  与  $y$  轴交于点  $M$ , 直线  $PB$  与  $x$  轴交于点  $N$ . 求证: 四边形  $ABNM$  的面积为定值.

3. (2017 全国 I, 文 20) 设  $A, B$  为曲线  $C: y = \frac{1}{x}$  上两点,  $A$  与  $B$  的横坐标之和为 4.

- (1) 求直线  $AB$  的斜率;
- (2) 设  $M$  为曲线  $C$  上一点,  $C$  在  $M$  处的切线与直线  $AB$  平行, 且  $AM \perp BM$ , 求直线  $AB$  的方程.

---

4. 已知抛物线  $C: y^2 = 2px (p > 0)$ , 过焦点且斜率为 1 的直线  $m$  交抛物线  $C$  于  $A, B$  两点, 以线段  $AB$  为直径的圆在  $y$  轴上截得的弦长为 2.

(1) 求抛物线  $C$  的方程.

(2) 过点  $P(0, 2)$  的直线  $l$  交抛物线  $C$  于  $F, G$  两点, 交  $x$  轴于点  $D$ , 设  $\lambda_1 = \lambda_2$ , 试问  $\lambda_1 + \lambda_2$  是否为定值? 若是, 求出该定值; 若不是, 请说明理由.

5. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的两焦点与短轴的一个端点的连线构成等腰直角三角形, 直线  $x + y + 1 = 0$  与以椭圆  $C$  的右焦点为圆心, 以椭圆的长半轴长为半径的圆相切.

(1) 求椭圆  $C$  的方程;

(2) 设  $P$  为椭圆  $C$  上一点, 若过点  $M(2, 0)$  的直线  $l$  与椭圆  $C$  相交于不同的两点  $S$  和  $T$ , 满足  $\vec{PS} = t\vec{PT}$  ( $O$  为坐标原点), 求实数  $t$  的取值范围.

6. 已知抛物线  $C_1: x^2 = 4y$  的焦点  $F$  也是椭圆  $C_2: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的一个焦点,  $C_1$  与  $C_2$  的公共弦的长为 2.

(1) 求  $C_2$  的方程;

(2) 过点  $F$  的直线  $l$  与  $C_1$  相交于  $A, B$  两点, 与  $C_2$  相交于  $C, D$  两点, 且同向.

① 若  $|AC| = |BD|$ , 求直线  $l$  的斜率;

② 设  $C_1$  在点  $A$  处的切线与  $x$  轴的交点为  $M$ , 证明: 直线  $l$  绕点  $F$  旋转时,  $\triangle MFD$  总是钝角三角形.

##

## 题型练 7 大题专项(五)

### 解析几何综合问题

1.解 (1)椭圆  $C$  的标准方程为  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

所以  $a=2, b=1, c=\sqrt{3}$ .

所以椭圆  $C$  的离心率  $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

(2)因为  $AB$  过点  $D(1,0)$  且垂直于  $x$  轴,

所以可设  $A(1, y_1), B(1, -y_1)$ .

直线  $AE$  的方程为  $y-1=(1-y_1)(x-2)$ .

令  $x=3$ , 得  $M(3, 2-y_1)$ .

所以直线  $BM$  的斜率  $k_{BM}=\frac{2-y_1}{2}$ .

(3)直线  $BM$  与直线  $DE$  平行. 证明如下:

当直线  $AB$  的斜率不存在时, 由(2)可知  $k_{BM}=1$ .

又因为直线  $DE$  的斜率  $k_{DE}=1$ ,

所以  $BM \parallel DE$ .

当直线  $AB$  的斜率存在时, 设其方程为  $y=k(x-1) (k \neq 1)$ .

设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 则直线  $AE$  的方程为  $y-1=(x-2)$ .

令  $x=3$ , 得点  $M$ .

由得  $(1+3k^2)x^2-6k^2x+3k^2-3=0$ .

所以  $x_1+x_2=\frac{6k^2}{1+3k^2}, x_1x_2=\frac{3k^2-3}{1+3k^2}$ ,

直线  $BM$  的斜率  $k_{BM}=\frac{2-y_1}{2}$ .

因为  $k_{BM}-1=\frac{2-y_1}{2}-1=\frac{1-y_1}{2}$

$=\frac{1-k(x_1-1)}{2}$

$=\frac{1-kx_1+k}{2}$

所以  $k_{BM}=1=k_{DE}$ , 所以  $BM \parallel DE$ .

综上可知, 直线  $BM$  与直线  $DE$  平行.

2.解 (1)由题意, 得  $a=2, b=1$ , 所以椭圆  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ . 又  $c=\sqrt{3}$ , 所以离心率  $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

(2)设  $P(x_0, y_0) (x_0 < 0, y_0 < 0)$ , 则  $x_0^2 + 4y_0^2 = 4$ .

又  $A(2, 0), B(0, 1)$ ,

所以直线  $PA$  的方程为  $y=\frac{y_0}{x_0-2}(x-2)$ .

令  $x=0$ , 得  $y_M=-\frac{2y_0}{x_0-2}$ , 从而  $|BM|=1-y_M=1+\frac{2y_0}{x_0-2}$ . 直线  $PB$  的方程为  $y=\frac{y_0}{x_0}(x)$ .

令  $y=0$ , 得  $x_N=-x_0$ ,

从而  $|AN|=2-x_N=2+x_0$ .

所以四边形  $ABNM$  的面积

$S=\frac{1}{2}|AN| \cdot |BM|$

$=\frac{1}{2}(2+x_0)(1+\frac{2y_0}{x_0-2})$

$=\frac{1}{2}(2+x_0)(\frac{x_0-2+2y_0}{x_0-2})$

$=\frac{1}{2}(2+x_0)(\frac{x_0-2+2y_0}{x_0-2})$

从而四边形  $ABNM$  的面积为定值.

3.解 (1)设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 则  $x_1 \neq x_2, y_1 = y_2 = 1, x_1 + x_2 = 4$ , 于是直线  $AB$  的斜率  $k=1$ .

(2)由  $y=1$ , 得  $y'=0$ . 设  $M(x_3, y_3)$ ,

由题设知  $|MN|=1$ , 解得  $x_3=2$ , 于是  $M(2, 1)$ .

设直线  $AB$  的方程为  $y=x+m$ , 故线段  $AB$  的中点为  $N(2, 2+m)$ ,  $|MN|=|m+1|$ .

将  $y=x+m$  代入  $y=1$  得  $x^2-4x-4m=0$ .

当  $\Delta=16(m+1)>0$ ,

即  $m>-1$  时,  $x_{1,2}=2 \pm 2\sqrt{m+1}$ .

从而  $|AB|=|x_1-x_2|=4$ .

由题设知  $|AB|=2|MN|$ , 即  $4=2(m+1)$ ,

解得  $m=7$ .

所以直线  $AB$  的方程为  $y=x+7$ .

**4.解** (1)由已知:直线  $m$  的方程为  $y=x-$ , 代入  $y^2=2px$ , 得  $x^2-3px+=0$ .

设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 则  $x_1+x_2=3p, |AB|=x_1+x_2+p=4p$  且线段  $AB$  的中点为,

由已知  $()^2+=(2p)^2$ ,

解得  $p=2$  或  $p=-2$ (舍去),

所以抛物线  $C$  的方程为  $y^2=4x$ .

(2)设直线  $l:y=kx+2(k\neq 0)$ , 则  $D$ ,

联立得  $k^2x^2+4(k-1)x+4=0$ .

由  $\Delta>0$  得  $k<$ . 设  $F(x_3, y_3), G(x_4, y_4)$ ,

则  $x_3+x_4=, x_3x_4=$ .

$=\lambda_1\Rightarrow(x_3, y_3-2)=\lambda_1,$

$=\lambda_2\Rightarrow(x_4, y_4-2)=\lambda_2,$

所以  $\lambda_1=-, \lambda_2=-$ .

则  $\lambda_1+\lambda_2=-$

$=-$ .

将  $x_3+x_4=, x_3x_4=$  代入上式得  $\lambda_1+\lambda_2=-1$ .

即  $\lambda_1+\lambda_2$  为定值  $-1$ .

**5.解** (1)由题意,以椭圆  $C$  的右焦点为圆心,以椭圆的长半轴长为半径的圆的方程为

$(x-c)^2+y^2=a^2$ ,

$\therefore$  圆心到直线  $x+y+1=0$  的距离  $d==a$ . (\*)

$\therefore$  椭圆  $C$  的两焦点与短轴的一个端点的连线构成等腰直角三角形,

$\therefore b=c, a=b=c$ , 代入 (\*) 式得  $b=c=1$ ,

$\therefore a=b=$ ,

故所求椭圆  $C$  的方程为  $+y^2=1$ .

(2)由题意知直线  $l$  的斜率存在, 设直线  $l$  方程为  $y=k(x-2)$ , 设  $P(x_0, y_0)$ ,

将直线方程代入椭圆方程, 得  $(1+2k^2)x^2-8k^2x+8k^2-2=0$ ,

$\therefore \Delta=64k^4-4(1+2k^2)(8k^2-2)=-16k^2+8>0$ ,

$\therefore k^2<$ .

设  $S(x_1, y_1), T(x_2, y_2)$ , 则  $x_1+x_2=, x_1x_2=$ . 由  $=t$ ,

当  $t=0$  时, 直线  $l$  为  $x$  轴, 点  $P$  在椭圆上适合题意;

当  $t\neq 0$  时, 得

$\therefore x_0=, y_0=$ .

将上式代入椭圆方程, 得  $=1$ , 整理, 得  $t^2=$ .

由  $k^2<$  知,  $0<t^2<4$ ,  $\therefore t\in(-2, 0)\cup(0, 2)$ ,

综上可得  $t\in(-2, 2)$ .

**6.解** (1)由  $C_1:x^2=4y$  知其焦点  $F$  的坐标为  $(0, 1)$ .

因为  $F$  也是椭圆  $C_2$  的一个焦点,

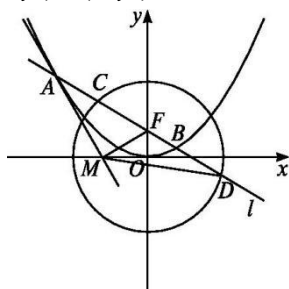
所以  $a^2-b^2=1$ . ①

又  $C_1$  与  $C_2$  的公共弦的长为  $2$ ,  $C_1$  与  $C_2$  都关于  $y$  轴对称, 且  $C_1$  的方程为  $x^2=4y$ , 由此易知

$C_1$  与  $C_2$  的公共点的坐标为, 所以  $=1$ . ②

联立 ①② 得  $a^2=9, b^2=8$ . 故  $C_2$  的方程为  $=1$ .

(2)如图,设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3), D(x_4, y_4)$ .



①因同向,且  $|AC|=|BD|$ ,

所以,从而  $x_3-x_1=x_4-x_2$ ,

即  $x_1-x_2=x_3-x_4$ , 于是  $(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=(x_3+x_4)^2-4x_3x_4$ . ③

设直线  $l$  的斜率为  $k$ , 则  $l$  的方程为  $y=kx+1$ .

由得  $x^2-4kx-4=0$ .

而  $x_1, x_2$  是这个方程的两根,

所以  $x_1+x_2=4k, x_1x_2=-4$ . ④

由得  $(9+8k^2)x^2+16kx-64=0$ .

而  $x_3, x_4$  是这个方程的两根,

所以  $x_3+x_4=-\frac{16k}{9+8k^2}, x_3x_4=-\frac{64}{9+8k^2}$ . ⑤

将④⑤代入③,得  $16(k^2+1)=\frac{64}{9+8k^2}$ , 即  $16(k^2+1)(9+8k^2)=64$ ,

所以  $(9+8k^2)^2=16 \times 9$ , 解得  $k=\pm \frac{3}{4}$ , 即直线  $l$  的斜率为  $\pm \frac{3}{4}$ .

②证明:由  $x^2=4y$  得  $y'=\frac{1}{2}x$ , 所以  $C_1$  在点  $A$  处的切线方程为  $y-y_1=\frac{1}{2}(x-x_1)$ , 即  $y=\frac{1}{2}(x-x_1)+y_1$ .

令  $y=0$  得  $x=x_1-2y_1$ , 即  $M$ ,

所以  $\overrightarrow{FM}=(x_1-2y_1, -1)$ , 于是  $|\overrightarrow{FM}|^2=(x_1-2y_1)^2+1>0$ ,

因此  $\angle AFM$  是锐角, 从而  $\angle MFD=180^\circ - \angle AFM$  是钝角.

故直线  $l$  绕点  $F$  旋转时,  $\triangle MFD$  总是钝角三角形.