2012—2013学年度上学期期末考试高二年级理科数学试卷答案

一、选择题：1.C　2. A　3. D　4.D　5 . B　6.B　7.A　8.C　9.D　10. A　11. C　12.B

二、填空题：13. <u>8</u>　14. <u>5</u>　15. $\frac{1}{8}$　16. <u>3</u>

三．解答题：**17．解**：令 $f(x)=(m^2-1)x^2-(m+1)x-2$，

(1) 当 $m^2-1=0$ 时,方程至多有一解，不合题意.…………3 分

(2)当 $m^2-1>0$ 时只需 $f(-1)<0$，即

$$\begin{cases} m^2-1>0 \\ m^2+m-2<0 \end{cases} \Rightarrow -2<m<-1$$ …………6 分

(3)当 $m^2-1<0$ 时只需 $f(-1)>0$，即

$$\begin{cases} m^2-1<0 \\ m^2+m-2>0 \end{cases} \Rightarrow m\in\Phi$$ ………………8 分

综上　$-2<m<-1$　…………………………10 分

18．解：设花坛的长、宽分别为 x 米，y 米，根据要求，矩形花坛应在喷水区域内，顶点应恰好位于喷水区域的边界．依题意得：$(\frac{x}{4})^2+(\frac{y}{2})^2=25$，（$x>0,y>0$）……2 分

问题转化为在 $x>0,y>0$，$\frac{x^2}{4}+y^2=100$ 的条件下，求 $S=xy$ 的最大值．

法一：$\because S=xy=2\cdot\frac{x}{2}\cdot y\le(\frac{x}{2})^2+y^2=100$，……………………6 分

由 $\frac{x}{2}=y$ 和 $\frac{x^2}{4}+y^2=100$ 及 $x>0,y>0$ 得：$x=10\sqrt{2},y=5\sqrt{2}$ $\therefore S_{\max}=100$ ………10 分

法二：$\because x>0,y>0$，$\frac{x^2}{4}+y^2=100$，

$$\therefore S=xy=x\sqrt{100-\frac{x^2}{4}}=\sqrt{x^2\cdot(100-\frac{x^2}{4})}=\sqrt{-\frac{1}{4}(x^2-200)^2+10000}$$ ……6 分

∴当 $x^2=200$，即 $x=10\sqrt{2}$，$S_{\max}=100$ …………………………8 分

由 $\frac{x^2}{4}+y^2=100$ 可解得：$y=5\sqrt{2}$．……………………10 分

答：花坛长为$10\sqrt{2}m$，宽为$5\sqrt{2}m$，两喷水器位于矩形分成的两个正方形的中心．………………12 分

19．解：方法 1（Ⅰ）以 A 为原点，以$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{AF}$为 x、y、z 轴正方向建系，设 BC=m，BE=n，AB=d　　则$E(d,0,n)$，$C(d,m,n)$，$F(0,0,2n)$，$D(0,2m,0)$…2 分

$\therefore \overrightarrow{CE}=(0,-m,n),\overrightarrow{DF}=(0,-2m,2n)$　…………………………4 分

$\therefore 2\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{DF}$，即$CE // DF$，$\therefore C$，$D$，$F$，$E$四点共面　………………………6 分

（Ⅱ）由（1）可设$\overrightarrow{AE}=(1,0,1),\overrightarrow{AD}=(0,2,0)$　设平面 AED 的法向量为$\vec{n}=(x,0,z)$

由$\begin{cases}\overrightarrow{AE}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{AD}\cdot\vec{n}=0\cdot\end{cases}\Rightarrow \vec{n}=(1,0,-1)$　…………………………8 分

同理 可得平面 EBD 的法向量$\vec{m}=(1,\frac{1}{2},0)$………………10 分

二面角的余弦值 $\cos\theta=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{\sqrt{10}}{5}$　$\therefore$二面角的大小为$\arccos\frac{\sqrt{10}}{5}$…12 分

方法 2（Ⅰ）延长DC交AB的延长线于点G，由$BC \underline{\underline{//}} \frac{1}{2}AD$得

$$\frac{GB}{GA}=\frac{GC}{GD}=\frac{BC}{AD}=\frac{1}{2}$$ ……………………2 分

延长FE交AB的延长线于G'同理可得$\frac{G'E}{G'F}=\frac{G'B}{G'A}=\frac{BE}{AF}=\frac{1}{2}$……4 分

故$\frac{G'B}{G'A}=\frac{GB}{GA}$，即$G$与$G'$重合, 因此直线$CD$、$EF$相交于点$G$，即$C,D,F,E$四点共面. ……………………6 分

（Ⅱ）设$AB=1$，则$BC=BE=1$，$AD=2$取AE中点M，则$BM\perp AE$，又由已知得，$AD\perp$平面$ABEF$故$AD\perp BM$，BM 与平面ADE内两相交直线AD、AE都垂直。所以$BM\perp$平面ADE，作$MN\perp DE$，垂足为N，连结BN由线面垂直可判定知$BN\perp ED$，$\angle BMN$为二面角$A-ED-B$的平面角。……………………9 分

$$BM=\frac{\sqrt{2}}{2},\ MN=\frac{1}{2}\cdot\frac{AD\times AE}{DE}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$ 故 $\tan\angle BNM=\frac{BM}{MN}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

$\tan\angle BMN=\frac{BM}{MN}=\frac{\sqrt{6}}{2}$所以二面角$A-ED-B$的大小$\arctan\frac{\sqrt{6}}{2}$………12 分

20．（Ⅰ）**解：**抛物线 $y^2=4x$的焦点F的坐标是$(1,0)$，

设点 $M(x_0, y_0)$， 其中 $x_0 \geq 0$. 因为 $\overrightarrow{FM}=(x_0-1, y_0)$， $\overrightarrow{OM}=(x_0, y_0)$，

所以 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{OM}=x_0(x_0-1)+y_0^2=x_0^2+3x_0=4$，………………3 分

解得 $x_0=1$，或 $x_0=-4$（舍）. 因为 $y_0^2=4x_0$， 所以 $y_0=\pm 2$，

即点 M 的坐标为 $(1,2)$，$(1,-2)$. ……………………6 分

（Ⅱ）设点 $M(x, y)$，其中 $x\geq 0$.

$\dfrac{|\overrightarrow{OM}|}{|\overrightarrow{FM}|}=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=\sqrt{\dfrac{x^2+4x}{(x+1)^2}}=\sqrt{\dfrac{-3}{(x+1)^2}+\dfrac{2}{x+1}+1}$. …………8 分

设 $t=\dfrac{1}{x+1}$ $(0<t\leq 1)$，则 $\dfrac{|\overrightarrow{OM}|}{|\overrightarrow{FM}|}=\sqrt{-3t^2+2t+1}=\sqrt{-3\left(t-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{4}{3}}$. …10 分

因为 $0<t\leq 1$，所以当 $t=\dfrac{1}{3}$（即 $x=2$）时，$\dfrac{|\overrightarrow{OM}|}{|\overrightarrow{FM}|}$ 取得最大值 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. ……12 分

21．解（Ⅰ）$\because S_n=2a_n-2, S_{n-1}=2a_{n-1}-2,$ 又 $S_n - S_{n-1} = a_n$，$(n\geq 2, n\in N^*)$

$\therefore$ 作差可得 : $a_n=2a_n-2a_{n-1}$ $\because a_n\neq 0$

$\therefore \dfrac{a_n}{a_{n-1}}=2,(n\geq 2, n\in N^*)$, 即数列 $\{a_n\}$ 是等比数列。…2 分

$\because a_1=S_1, \therefore a_1=2a_1-2$, 即 $a_1=2$ $\therefore a_n=2^n$ ……………………4 分

$\because$ 点 $P(b_n, b_{n+1})$ 在直线x−y+2=0上，$\therefore b_n-b_{n+1}+2=0$

$\therefore b_{n+1}-b_n=2$，即数列 $\{b_n\}$ 是等差数列，有 $b_1=1, \therefore b_n=2n-1$…………6 分

（II）$\because c_n=(2n-1)2^n$,

$\therefore T_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=1\times 2+3\times 2^2+5\times 2^3+\cdots+(2n-1)2^n$, ……8 分

$\therefore 2T_n=1\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+(2n-3)2^n+(2n-1)2^{n+1}$

因此：$-T_n=1\times2+(2\times2^2+2\times2^3+\cdots+2\times2^n)-(2n-1)2^{n+1}$

即：$-T_n=1\times2+(2^3+2^4+\cdots+2^{n+1})-(2n-1)2^{n+1}$

$T_n=(2n-3)2^{n+1}+6$ ……………………………10 分

$\therefore T_n<448,即:(2n-3)2^{n+1}+6<448\Rightarrow(2n-3)2^{n+1}<442$

由于当 $n=4$ 时 $:(2n-3)2^{n+1}=(2\times4-3)2^5=160$ $n=5$ 时 $:(2n-3)2^{n+1}=(2\times5-3)2^6=448$ 故满足条件的最大正整数 n 是 4 ………12 分

22．解：（I）设 $C(x,y)$，则重心 $G(\frac{x}{3},\frac{y}{3})$ ………………2 分

$\because\overrightarrow{GM}=\lambda\overrightarrow{AB}$ $\therefore GM\,//\,AB$ 又 M 是 x 轴上一点，则 $M(\frac{x}{3},0)$ ………………4 分

又 $|\overrightarrow{MA}|=|\overrightarrow{MC}|$，$\therefore\sqrt{(\frac{x}{3})^2+4}=\sqrt{(\frac{x}{3}-x)^2+y^2}$ 得到点 C 的轨迹方程为：

$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1(x\neq0)$ ……6 分

（II）由（I）可知 C 的轨迹方程 $x^2+3y^2=12(x\neq0)$，设 $P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$ 则

$\begin{cases}x_1^2+3y_1^2=12\\x_2^2+3y_2^2=12\end{cases}$ 作差得：$(x_1+x_2)+3(y_1+y_2)\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=0$ …………8 分

$\because x_1+x_2=-\frac{3}{2},y_1+y_2=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=1$

$\therefore$ 直线 l 的方程为$:y=x+1$ ………………10 分

代入曲线 C 的方程得到：$4x^2+6x-9=0$，$x_1+x_2=-\frac{3}{2},x_1x_2=-\frac{9}{4}$

故 $|PQ|=\sqrt{1+k^2}\,|x_2-x_1|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_2+x_1)^2-4x_2x_1}=\frac{3\sqrt{10}}{2}$ …………12 分