2015—2016 学年度上学期期末考试高三年级

数学（文科）参考答案与评分参考

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

一、选择题	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
参考答案	B	D	B	B	D	A	C	B	B	B	C	C

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.75　　14. 4　　15. -4　　16. 12

三、解答题：本大题共 6 小题，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 解：（1）$f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\dfrac{1+\cos 2x}{2}-\dfrac{1}{2}=\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})-1$　　………2 分

$\because x\in[-\dfrac{\pi}{12},\dfrac{5\pi}{12}]$，$\therefore 2x-\dfrac{\pi}{6}\in[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}]$

$\therefore$ 当 $2x-\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{3}$，即 $x=-\dfrac{\pi}{12}$ 时，函数 $f(x)$ 有最小值 $-1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；

当 $2x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，即 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 时，函数 $f(x)$ 有最大值 0.　　…………6 分

（2）$f(C)=\sin(2C-\dfrac{\pi}{6})-1=0$，则 $\sin(2C-\dfrac{\pi}{6})=1$

$\because 0<C<\pi$，$\therefore -\dfrac{\pi}{6}<2C-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{11\pi}{6}$，

$\therefore 2C-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，　　$C=\dfrac{\pi}{3}$　　………………8 分

$\because$ 向量 $\vec{m}=(1,\sin A)$ 与向量 $\vec{n}=(2,\sin B)$ 共线，$\therefore \dfrac{1}{2}=\dfrac{\sin A}{\sin B}$，

由正弦定理得 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{2}$　　①

由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\dfrac{\pi}{3}$，

即 $a^2+b^2-ab=3$　　②

由①②，解得 $a=1,b=2$　　………………12 分

18. 解：（1）将 2 名男同学和 4 名女同学分别编号为 1，2，3，4，5，6（其中 1，2 是男同学，3，4，5，6 是女同学），该学院 6 名同学中有 4 名当选的情况有（1，2，3，4），（1，2，3，5），（1，2，3，6），（1，2，4，5），（1，2，4，6），（1，2，5，6），（1，3，4，5），（1，3，4，6），（1，3，5，6），（1，4，5，6），（2，3，4，5），（2，3，4，6），（2，3，5，6），（2，4，5，6），（3，4，5，6），共 15 种， ……2 分

记事件 A：当选的 4 名同学中恰有 1 名男同学，则事件 A 包含的情况有（1，3，4，5），（1，3，4，6），（1，3，5，6），（1，4，5，6），（2，3，4，5），（2，3，4，6），（2，3，5，6），（2，4，5，6），共 8 种， …………4 分

故当选的 4 名同学中恰有 1 名男同学的概率为 $P(A)=\dfrac{8}{15}$. …………6 分

（2）记事件 B：当选的 4 名同学中至少有 3 名女同学

事件 C：当选的 4 名同学中均为女同学

则事件 C 包括（3，4，5，6）一种情况，所以 $P(C)=\dfrac{1}{15}$ …………8 分

又 $B=A\bigcup C$，且 A、C 互斥

故 $P(B)=P(A\bigcup C)=P(A)+P(C)=\dfrac{8}{15}+\dfrac{1}{15}=\dfrac{9}{15}=\dfrac{3}{5}$ …………11 分

答：当选的 4 名同学中恰有 1 名男同学的概率为 $\dfrac{8}{15}$；当选的 4 名同学中至少有 3 名女同学的概率 $\dfrac{3}{5}$. …………12 分

19. （Ⅰ）证明：因为 $BE=AE=\sqrt{2},AB=2$，所以 $BE\perp AE$.

又平面 $DAE\perp$ 平面 $ABCE$，且平面 $DAE\cap$ 平面 $ABCE=AE$，

所以 $BE\perp$ 平面ADE. ………………6 分

（II）【方法一】由（I）可知，$BE\perp$ 平面ADE，所以 $BE\perp AD$，

又 $AD\perp DE$，$DE\bigcap BE=E$，$DE,BE\subset$ 平面 BDE $\therefore AD\perp$ 平面 BDE

即 AD 即为点 A 到平面 BDE 的距离，又 $AD=1$

$\therefore$ 点 A 到平面 BDE 的距离为 1 ……………………12 分

【方法二】作 $DH\perp AE$，垂足为 H，则 $DH\perp$ 平面 $ABCE$

设点 A 到平面 BDE 的距离为 h，

$\because V_{A-BDE}=V_{D-ABE}$， $\therefore \dfrac{1}{3}S_{\Delta BDE}\cdot h=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ABE}\cdot DH$

即 $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot BE\cdot DE\cdot h=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot BE\cdot AE\cdot DH$ 解得 $h=1$

$\therefore$ 点 A 到平面 BDE 的距离为 1 ……………………12 分

20. **解** **(1)**由题意：

$$\begin{cases} c^2 = 2 \\ \dfrac{2}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = 1 \\ c^2 = a^2 - b^2 \end{cases}$$ ，解得 $a^2 = 4, b^2 = 2$，所求椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{2} = 1$ …4 分

(2) 【**方法一**】由题可知直线 l 斜率一定存在，设 $l: y = k(x-4)$**,**点 Q、A、B 的坐标分别为 $(x,y),(x_1,y_1),(x_2,y_2)$.

$$\because \frac{\left|\overrightarrow{AP}\right|}{\left|\overrightarrow{PB}\right|} = \frac{\left|\overrightarrow{AQ}\right|}{\left|\overrightarrow{QB}\right|} \therefore \left|\overrightarrow{AP}\right|\left|\overrightarrow{QB}\right| = \left|\overrightarrow{AQ}\right|\left|\overrightarrow{PB}\right|$$

$(4-x_1)(x-x_2) = (x_1-x)(4-x_2)$ ……(*)

………………8 分

� $\begin{cases} y = k(x-4) \\ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{2} = 1 \end{cases}$ �� $(1+2k^2)x^2 - 16k^2x + 32k^2 - 4 = 0$

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{16k^2}{1+2k^2}, x_1x_2 = \frac{32k^2-4}{1+2k^2}$$

带入（*）式整理得：$8x + 2x_1x_2 - (x+4)(x_1+x_2) = 0$ ………………10 分

$$\therefore 8x + \frac{64k^2-8}{1+2k^2} - (x+4)\frac{16k^2}{1+2k^2} = 0$$

解得 $x = 1$

所以点 Q 总在定直线 $x = 1$ 上. ………………12 分

【方法二】由对称性可知，定直线若存在则一定垂直 x 轴，若 $l: y = 0$，则 A、B 的坐标为 $(\pm 2,0)$，则 $Q(1,0)$，**∴**定直线只可能为 $x = 1$，证明如下： …………6 分

设点 Q、A、B 的坐标分别为 $(x,y),(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ 。

记 $\lambda=\dfrac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|}=\dfrac{|\overrightarrow{AQ}|}{|\overrightarrow{QB}|}$,则 $\lambda>0$ 且 $\lambda\neq 1$

又 A，P，B，Q 四点共线，从而 $\overrightarrow{PA}=\lambda\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{QA}=-\lambda\overrightarrow{QB}$

于是 $\begin{cases} x_1-4=\lambda(x_2-4) & (1) \\ y_1=\lambda y_2 & (2) \end{cases}$　　$\begin{cases} x_1-x=-\lambda(x_1-x) & (3) \\ y_1-y=-\lambda(y_2-y) & (4) \end{cases}$ ……8 分

由（2）$y_1{}^2=\lambda^2 y_2{}^2$，又 $\dfrac{x_1{}^2}{4}+\dfrac{y_1{}^2}{2}=1$，$\dfrac{x_2{}^2}{4}+\dfrac{y_2{}^2}{2}=1$

$\therefore 2-\dfrac{x_1{}^2}{2}=\lambda^2(2-\dfrac{x_2{}^2}{2})$，即 $x_1{}^2-\lambda^2 x_2{}^2=4(1-\lambda^2)$

又由（1）可得 $x_1-\lambda x_2=4(1-\lambda)$　　$\therefore x_1+\lambda x_2=1+\lambda$

由（3）可得 $x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$　　故 $x=1$

即点 Q 总在定直线 $x=1$ 上　　…………12 分

21．解：（1）当 $a=2$ 时，$f(x)=\dfrac{2}{x}+\ln x$，$f'(x)=-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-2}{x^2}$，$f(1)=2$，

$f'(1)=-1$，所以曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $x+y-3=0$　　…… 3 分

（2）$g(x)=x^3-x^2-3$，　$g'(x)=3x^2-2x=3x(x-\dfrac{2}{3})$，

x	0	$(0,\frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3},2]$	2
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	-3	递减	极（最）小值 $-\frac{85}{27}$	递增	1

由上表可知：$g(x)_{\max}=g(2)=1$，　$\therefore M\leq 1$

所以满足条件的最大整数 $M=1$；　　…………7 分

（3）由（2）可知，当$x\in[\frac{1}{2},2]$时，$g(x)_{\max}=g(2)=1$

$\therefore$当$x\in[\frac{1}{2},2]$时，$f(x)=\frac{a}{x}+\ln x\geq 1$恒成立

等价于$a\geq x-x\ln x$恒成立，

记$h(x)=x-x\ln x$，$x\in[\frac{1}{2},2]$

$h'(x)=-\ln x$，

$\therefore$函数$h(x)=x-x\ln x$在区间$[\frac{1}{2},1)$上递增，在区间$(1,2]$上递减，

所以$h(x)_{\max}=h(1)=1$，

所以$a\geq 1$。 ………… 12 分

选做题（请考生从 22、23、24 三题中任选一题做答，如果多做，则按所做的第一题记分）

22． 证明： （Ⅰ）证明：AB 为直径，$\therefore\angle ACB=\frac{\pi}{2}$,

$\angle CAB+\angle ABC=\frac{\pi}{2}$,

$\because\angle PAC=\angle ABC\ \therefore\angle PAC+\angle CAB=\frac{\pi}{2}$

$\therefore PA\perp AB, AB$为直径，$\therefore PA$为圆的切线 …………… 5 分

（Ⅱ）$CE=6k, ED=5k,, AE=2m, EB=3m$

$\because AE\cdot EB=CE\cdot ED\Rightarrow m=\sqrt{5}k$

$\because\Delta AEC\backsim\Delta DEB\Rightarrow\frac{BD}{8}=\frac{3m}{6k}\Rightarrow BD=4\sqrt{5}$

$\because\Delta CEB\backsim\Delta AED\Rightarrow\frac{BC^2}{AD^2}=\frac{25m^2-64}{25m^2-80}=(\frac{3k}{m})^2\Rightarrow m=2, k=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\therefore AB=10,\ BD=4\sqrt{5}$在直角三角形$ADB$中

$\sin\angle BAD=\frac{BD}{AB}=\frac{4\sqrt{5}}{10}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\because\angle BCE=\angle BAD\ \therefore\sin\angle BCE=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ …………… 10 分

23．(1)由O的参数方程得圆心O的坐标为$(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$

设圆心坐标为(ρ,θ)，（$\rho>0, 0\le\theta<2\pi$）；则$\begin{cases}\rho^2=(-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(-\frac{\sqrt{2}}{2})^2=1\\ \tan\theta=\dfrac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=1\end{cases}$

所以$\begin{cases}\rho=1\\ \theta=\frac{5\pi}{4}\end{cases}$，$\therefore$圆心$O$的极坐标为$(1,\frac{5\pi}{4})$ ………………5 分

(2)由直线l的参数方程得普通方程为$x+y=1$，圆心O为$(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$

$\because$圆O上的点到直线l的最大距离为3 $\therefore r+\dfrac{\left|-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right|}{\sqrt{2}}=3$，即$r=2-\frac{\sqrt{2}}{2}$

……………………10 分

24. 解：（Ⅰ）$\because |2x-1|+|2x-3|\le 5$，

$\begin{cases}x<\frac{1}{2}\\ 4-4x\le 5\end{cases}$或$\begin{cases}\frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{2}\\ 2\le 5\end{cases}$或$\begin{cases}x>\frac{3}{2}\\ 4x-4\le 5\end{cases}$.

解得：$-\frac{1}{4}\le x<\frac{1}{2}$或$\frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{2}$或$\frac{3}{2}<x\le\frac{9}{4}$

∴不等式的解集为：$\left\{-\frac{1}{4}\le x\le\frac{9}{4}\right\}$ ……5 分

（Ⅱ）若$g(x)=\dfrac{1}{f(x)+m}$的定义域为R，则$f(x)+m\ne 0$恒成立，

即$f(x)+m=0$在 R 上无解.

又$f(x)=|2x-1|+|2x-3|\ge|2x-1-2x+3|=2$，

∴$f(x)$最小值为 2， ∴$m>-2$. …..10 分