

2016-2017 学年度第一学期高一期末考试

数 学 试 卷

时量：120 分钟 分值：150 分

一、选择题：本大题共 12 个小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{1, 3, 6\}$, 那么集合 $\{2, 7\}$ 是 ()

- A. $A \cup B$ B. $A \cap B$ C. $C_U(A \cap B)$ D. $C_U(A \cup B)$

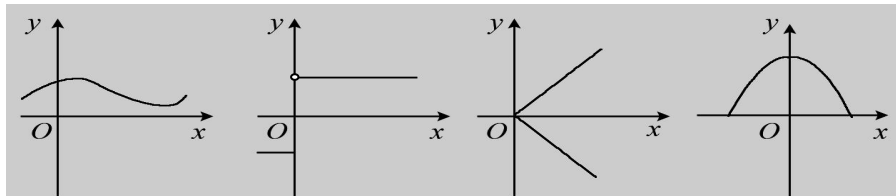
2. $\sin(-\frac{10}{3}\pi)$ 的值等于 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. 已知扇形的圆心角为 $\frac{\pi}{5}$, 半径等于 20, 则扇形的弧长为 ()

- A. 4π B. $\frac{200}{\pi}$ C. 2π D. $\frac{100}{\pi}$

4. 下列四个图形中, 不是以 x 为自变量的函数的图象是 ().



- A B C D

5. 已知 $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{5}$, 则 $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ 的值为 ()

- A. $\frac{12}{25}$ B. $-\frac{12}{25}$ C. $-\frac{7}{5}$ D. $\frac{7}{5}$

6. 下列三角函数值大小比较正确的是 ()

- A. $\sin \frac{19\pi}{8} < \cos \frac{14\pi}{9}$ B. $\sin(-\frac{54\pi}{7}) < \sin(-\frac{63\pi}{8})$
C. $\tan(-\frac{13\pi}{4}) > \tan(-\frac{17\pi}{5})$ D. $\tan 138^\circ > \tan 143^\circ$

7. 已知 $f(x) = ax^7 - bx^5 + cx^3 + 2$, 且 $f(-5) = m$, 则 $f(5) + f(-5)$ 的值为 ().

- A. 4 B. 0 C. $2m$ D. $-m+4$

8. 已知向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 60° , $|\vec{b}|=4$. $(\vec{a}+2\vec{b}) \cdot (\vec{a}-3\vec{b}) = -72$, 则向量 $\vec{a}$ 的模为 ()

- A. 2 B. 4 C. 12 D. 6

9. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$), $x = -\frac{\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 的零点, $x = \frac{\pi}{4}$ 为 $y = f(x)$

图像的对称轴, 且 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{36})$ 单调, 则 ω 的最大值为 ()

- A. 11 B. 9 C. 7 D. 5

10. 函数 $f(x) = x^5 + x - 3$ 的实数解落在的区间是 ()

- A. $[0,1]$ B. $[1,2]$ C. $[2,3]$ D. $[3,4]$

11. 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 1 的等边三角形, 点 D, E 分别是边 AB, BC 的中点, 连接 DE 并延

长到点 F , 使得 $DE = 2EF$, 则 $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BC}$ 的值为 ()

- A. $-\frac{5}{8}$ B. $\frac{1}{8}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{11}{8}$

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + (4a-3)x + 3a, & x < 0, \\ \log_a(x+1) + 1, & x \geq 0 \end{cases}$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 且关于 x

的方程 $|f(x)| = 2 - x$ 恰好有两个不相等的实数解, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $(0, \frac{2}{3}]$ B. $[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}]$
C. $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \cup \{\frac{3}{4}\}$ D. $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \cup \{\frac{3}{4}\}$

二、填空题: 本大题共 5 个小题, 每小题 4 分, 共 20 分.

13. 函数 $f(x) = \sqrt{x-2} + \frac{1}{x-3}$ 的定义域是_____.

14. 已知 $\vec{a} = (1, 2), \vec{b} = (-3, x)$, 若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行, 则 $x =$ _____.

15. 已知 $\cos \alpha + \cos \beta = \frac{1}{2}, \sin \alpha + \sin \beta = \frac{1}{3}$, 则 $\cos(\alpha - \beta) =$ _____.

16. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x|, & x \leq m, \\ x^2 - 2mx + 4m, & x > m, \end{cases}$ 其中 $m > 0$, 若存在实数 b , 使得关于 x 的方程

$f(x) = b$ 有三个不同的根, 则 m 的取值范围是_____.

三、解答题：本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本题满分 10 分) 求值:

(1) $2\sin 0 + \cos \pi + \sqrt{2} \cos(-\frac{\pi}{4})$

(2) 已知 $\tan \alpha = 3$, 计算 $\frac{4\sin \alpha - 2\cos \alpha}{5\cos \alpha + 3\sin \alpha}$ 的值.

18. (12 分) 设函数 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$ ($-\pi < \varphi < 0$), $y = f(x)$ 图像的一条对称轴是直线 $x = \frac{\pi}{6}$.

(I) 求 φ ;

(II) 求函数 $y = f(x)$ 的单调增区间;

19. (12 分) 已知函数 $f(x) = \lg(m^x - 2^x)$ ($0 < m < 1$).

(1) 当 $m = \frac{1}{2}$ 时, 求 $f(x)$ 的定义域.

(2) 若 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1]$ 上恒取正值, 求 m 的取值范围

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = \cos^4 x - 2\sin x \cos x - \sin^4 x$

(1) 求它的最小正周期

(2) 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, 求它的最小值以及取得最小值时自变量的集合。

21. (12 分) 已知向量 $\vec{a} = (\cos \frac{3}{2}x, \sin \frac{3}{2}x)$, $\vec{b} = (\cos \frac{x}{2}, -\sin \frac{x}{2})$, 且 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 求:

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 及 $|\vec{a} + \vec{b}|$;

(2) 若 $f(x) = \vec{a} \cdot \vec{b} - 2\lambda |\vec{a} + \vec{b}|$ 的最小值为 $-\frac{3}{2}$, 求实数 λ 的值。

22. 已知 $a \in R$, 函数 $f(x) = \log_2(\frac{1}{x} + a)$.

(1) 当 $a = 5$ 时, 解不等式 $f(x) > 0$;

(2) 若关于 x 的方程 $f(x) - \log_2[(a-4)x + 2a - 5] = 0$ 的解集中恰好有一个元素, 求 a 的取值范围;

(3) 设 $a > 0$, 若对任意 $t \in [\frac{1}{2}, 1]$, 函数 $f(x)$ 在区间 $[t, t+1]$ 上的最大值与最小值的差不超过 1, 求 a 的取值范围。

岳阳县一中 2016 高一期考参考答案

数 学 (文)

时量: 120 分钟 分值: 150 分

命题: 周湘伟 审题: 周新国

一、选择题: 本大题共 12 个小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. D 2. C 3. A 4. C 5. B 6. C 7. A 8. D 9. B 10. B 11. B 12. C

二、填空题: 本大题共 5 个小题, 每小题 4 分, 共 20 分.

13. $[2, 3) \cup (3, +\infty)$ 14. -6 15. $-\frac{59}{72}$ 16. $(3, +\infty)$.

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 解: (1) 原式 $= 0 - 1 + 1 = 0$; 5 分

$$(2) \text{ 原式} = \frac{4 \tan \alpha - 2}{5 + 3 \tan \alpha} = \frac{12 - 2}{5 + 9} = \frac{5}{7}. \quad 10 \text{ 分}$$

18. 解(1) $\therefore \frac{\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi$ 得 $\varphi = \frac{\pi}{6} + k\pi$ 5 分

$$\text{又 } -\pi < \varphi < 0, \therefore \varphi = -\frac{5\pi}{6}$$

$$(2) \text{ 由(1)知 } f(x) = \sin(2x - \frac{5\pi}{6})$$

$$\text{由 } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x - \frac{5\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ 得 } \frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + k\pi$$

∴ 函数的单调增区间为 $[\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi]$. 12 分

19、解：(1) 当 $m = \frac{1}{2}$ 时，要使 $f(x)$ 有意义，则 $(\frac{1}{2})^x - 2^x$ ，即 $2^{-x} > 2^x$ ，

可得 $-x > x$ ，即 $x < 0$

∴ 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0)$. …………… 5 分

(2) 由(2)知 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是减函数，∴ $f(x)$ 在 $(-\infty, -1]$ 单调递减，

∴ $f(x)$ 在 $(-\infty, -1]$ 上的最小值为 $f(-1) = \lg(m^{-1} - 2^{-1})$ ，

∴ 要使 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1]$ 上恒取正值，只需 $f(-1) = \lg(m^{-1} - 2^{-1}) > 0$ ，

即 $m^{-1} - 2^{-1} > 1$ ，∴ $\frac{1}{m} > 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ，

又 ∵ $0 < m < 1$ ，∴ $0 < m < \frac{2}{3}$ 。

即实数 m 的取值范围为 $(0, \frac{2}{3})$. …………… 12 分

20. (1) $T = \pi$ 6 分

(2) 最小值为 $-\sqrt{2}$ 此时 $x = \frac{3\pi}{8}$ 12 分

21. 解：(1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} - \sin \frac{3x}{2} \sin \frac{x}{2} = \cos 2x$ …… (2 分)

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(\cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{x}{2})^2 + (\sin \frac{3x}{2} - \sin \frac{x}{2})^2}$$

$$= \sqrt{2 + 2\cos 2x} = 2\sqrt{\cos^2 x} = 2|\cos x| \dots\dots (4 \text{ 分})$$

又 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ，∴ $\cos x \geq 0$ 从而 $|\vec{a} + \vec{b}| = 2\cos x$ …… (5 分)

(2) $f(x) = \cos 2x - 4\lambda \cos x = 2\cos^2 x - 4\lambda \cos x - 1$

$$= 2(\cos x - \lambda)^2 - 2\lambda^2 - 1 \dots\dots (6 \text{ 分})$$

由于 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 故 $0 \leq \cos x \leq 1$ …… (7 分)

① 当 $\lambda < 0$ 时，当且仅当 $\cos x = 0$ 时， $f(x)$ 取得最小值 -1 ，这与题设矛盾… (8 分)

② 当 $0 \leq \lambda \leq 1$ 时, 当且仅当 $\cos x = \lambda$ 时, $f(x)$ 取得最小值 $-2\lambda^2 - 1$, 由

$$-2\lambda^2 - 1 = -\frac{3}{2} \text{ 及 } 0 \leq \lambda \leq 1 \text{ 得 } \lambda = \frac{1}{2} \cdots \cdots (10 \text{ 分})$$

③ 当 $\lambda > 1$ 时, 当且仅当 $\cos x = 1$ 时, $f(x)$ 取得最小值 $1 - 4\lambda$, 由 $1 - 4\lambda = -\frac{3}{2}$, 得

$$\lambda = \frac{5}{8} \text{ 与 } \lambda > 1 \text{ 矛盾} \cdots \cdots (11 \text{ 分})$$

综上所述, $\lambda = \frac{1}{2}$ 即为所求。…… (12 分)

22. (1) 由 $\log_2\left(\frac{1}{x} + 5\right) > 0$, 得 $\frac{1}{x} + 5 > 1$,

解得 $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right) \cup (0, +\infty)$. 2 分

(2) $\frac{1}{x} + a = (a - 4)x + 2a - 5$, $(a - 4)x^2 + (a - 5)x - 1 = 0$,

当 $a = 4$ 时, $x = -1$, 经检验, 满足题意.

当 $a = 3$ 时, $x_1 = x_2 = -1$, 经检验, 满足题意.

当 $a \neq 3$ 且 $a \neq 4$ 时, $x_1 = \frac{1}{a - 4}$, $x_2 = -1$, $x_1 \neq x_2$.

x_1 是原方程的解当且仅当 $\frac{1}{x_1} + a > 0$, 即 $a > 2$;

x_2 是原方程的解当且仅当 $\frac{1}{x_2} + a > 0$, 即 $a > 1$.

于是满足题意的 $a \in (1, 2]$.

综上, a 的取值范围为 $(1, 2] \cup \{3, 4\}$. 7 分

(3) 当 $0 < x_1 < x_2$ 时, $\frac{1}{x_1} + a > \frac{1}{x_2} + a$, $\log_2\left(\frac{1}{x_1} + a\right) > \log_2\left(\frac{1}{x_2} + a\right)$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

函数 $f(x)$ 在区间 $[t, t+1]$ 上的最大值与最小值分别为 $f(t)$, $f(t+1)$.

$$f(t) - f(t+1) = \log_2\left(\frac{1}{t} + a\right) - \log_2\left(\frac{1}{t+1} + a\right) \leq 1 \text{ 即 } at^2 + (a+1)t - 1 \geq 0, \text{ 对任意}$$

$t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 成立.

因为 $a > 0$ ，所以函数 $y = at^2 + (a+1)t - 1$ 在区间 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上单调递增， $t = \frac{1}{2}$ 时， y

有最小值 $\frac{3}{4}a - \frac{1}{2}$ ，由 $\frac{3}{4}a - \frac{1}{2} \geq 0$ ，得 $a \geq \frac{2}{3}$. 12 分

故 a 的取值范围为 $\left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$.