2012-2013 学年度下学期期末考试高二年级数学科(理科)试卷
参考答案及评分标准

一、选择题：DCBAC　ABDCB　DA

二、填空题：

13、$2-2\ln 3$；14、13；15、 $[0,2]$；16、$(1,\dfrac{3}{2})$；

三、解答题：

17、解:（1）从列表中可知数学和物理两科成绩都优秀的学生有 4 人，他们的序号分别为 1,2,3,4

则序号为 1 的学生被选出的概率为 $P=\dfrac{C_3^1}{C_4^2}=\dfrac{1}{2}$……4 分

（2）2×2 列联表为：

	数学优秀	数学不优秀	合计
物理优秀	4	2	6
物理不优秀	2	12	14
合计	6	14	20

……8 分

假设物理成绩与数学成绩无关，计算：$k^2\approx 5.488>3.841$……11 分

因此有95%的把握认为物理成绩与数学成绩有关.$\cdots$12 分；

18、解:（1）令 $x=0$，得 $a_0=2^{2013}$；……4 分

（2）等式两边同时求导数得：

$-18(2-x)^{17}=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+18a_{18}x^{17}$，……7 分

令 $x=1$，得 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+18a_{18}=-18$；……9 分

（3）设该二项展开式相邻 k 项的二项式系数分别为 $C_n^r,C_n^{r+1},C_n^{r+2},\cdots,C_n^{r+k-1}$

由 $C_n^r:C_n^{r+1}=1:2$ 解得 $n=3r+2$；……10 分

由$C_n^r:C_n^{r+2}=1:3$得$\dfrac{(r+2)(r+1)}{(n-r)(n-r-1)}=\dfrac{1}{3}$

把$n=3r+2$代入上式的$r=4,n=14$……11 分

从而由$C_{14}^{k+2}:C_{14}^{k+3}=(k-1):k$，解得$k=2$或$k=3$

当$k=2$时$C_{14}^4:C_{14}^5=1:2$；当$k=3$时$C_{14}^4:C_{14}^5:C_{14}^6=1:2:3$

综上：$k=2$或$k=3$；……12 分

19、解：（1）由$x=\dfrac{M}{100}$，则$x_1=9$，$x_2=7$，$x_3=3$，$x_4=1$，$\overline{x}=5$，$\overline{y}=5$

$\sum\limits_{i=1}^{4}x_iy_i=9\times0.5+7\times3.5+3\times6.5+1\times9.5=58$，$\sum\limits_{i=1}^{4}x_i^2=140$

$\therefore b=\dfrac{58-4\times5\times5}{140-4\times5^2}=-\dfrac{21}{20}$，……2 分　　$a=5-5\times(-\dfrac{21}{20})=\dfrac{41}{4}$……4 分

$\therefore$ y 关于 x 的线性回归方程是$y=-\dfrac{21}{20}x+\dfrac{41}{4}$……6 分

（2)由表 2 知 AQI 指数不高于 200 的频率为 0.1，AQI 指数在 200 至 400 的频率为 0.2，AQI 指数大于 400 的频率为 0.7，设“小区某天参加晨练的人数 60”为事件A，“小区某天参加晨练的人数 40”为事件B，“小区某天参加晨练的人数 20”为事件C，若将频率看作概率，则$P(A)=0.1$，$P(B)=0.2$，$P(C)=0.7$．……8 分

设小区每天参加晨练的人数为X，则X的分布列为

X	20	40	60
P	0.7	0.2	0.1

……10 分

则X的数学期望为$E(X)=20\times0.7+40\times0.2+60\times0.1=28$……12 分

20、解：(1) $\because a_{n+1}=S_n-n+3$　　　　（1）

$\therefore a_n=S_{n-1}-(n-1)+3(n\ge2)$　　　　（2）

两列相减得$a_{n+1}-1=2(a_n-1)$

当$n=1$时,$a_2=2a_1-1=5$,$a_1=3$

$\therefore a_2-1=4,a_1-1=2$，$a_2-1=2(a_1-1)$

故总有 $a_{n+1}-1=2(a_n-1)$，$n\in N^*$，又 $a_1=3$，$a_1-1\neq 0$

从而 $\dfrac{a_{n+1}-1}{a_n-1}=2$，即数列 $\{a_n-1\}$ 是等比数列……5 分

(其中求出 $a_1=3$ 给 1 分, 不说明 $a_1-1\neq 0$ 扣 1 分)

（2）由（1）知 $a_n=2^n+1$

$\because\ f(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n$

$\therefore\ f'(x)=a_1+2a_2x+\cdots\cdots+na_nx^{n-1}$……6 分

$\therefore\ f'(1)=a_1+2a_2+\cdots\cdots+na_n$

$=(2+1)+2(2^2+1)+\cdots\cdots+n(2^n+1)$

$=(2+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots\cdots+n\times 2^n)+(1+2+3+\cdots\cdots+n)$

$=(n-1)\times 2^{n+1}+\dfrac{n(n+1)}{2}+2$……8 分

$\therefore 2f'(1)-(9n^2-3n)=4(n-1)\times 2^n+n(n+1)+4-9n^2+3n$

$=4(n-1)2^n-8n^2+4n+4$

$=4(n-1)\left[2^n-(2n+1)\right]$　　　　　　　　　　（1）

当 n=1 时（1）式为 0　　$2f'(1)=9n^2-3n$……9 分

当 n=2 时（1）式为-4　　$2f'(1)<9n^2-3n$……10 分

当 $n\geq 3$ 时，$n-1>0$,

又 $2^n=(1+1)^n=C_n^0+C_n^1+\cdots\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n\geq 2n+2>2n+1$

$\therefore (n-1)\left[2^n-(2n+1)\right]>0$ 即（1）式>0 $\therefore\ 2f'(1)>9n^2-3n$……12 分

21、解：（1）$\because f(x)=m\ln x+nx(x>0)$，$\therefore f'(x)=\dfrac{m}{x}+n$. ……1 分

$\because$ 函数 $f(x)$ 在点 $P\left(2,f\left(2\right)\right)$ 处的切线方程为 $y=\dfrac{3}{2}x+\ln 2-1$，

$\therefore \begin{cases} f(2)=2+\ln 2 \\ f'(2)=\dfrac{3}{2} \end{cases}$ 即 $\begin{cases} m\ln 2+2n=2+\ln 2 \\ \dfrac{1}{2}m+n=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

解得 $m=n=1$，$\therefore f(x)=\ln x+x(x>0)$ ……3 分

（2）由 $M(1,1)$、$Q\left(x_0,\ln x_0+x_0\right)$，得 $k_{MQ}=\dfrac{\ln x_0+x_0-1}{x_0-1}$

$\therefore$ “当 $x_0>1$ 时，直线 MQ 的斜率恒小于 a” $\Leftrightarrow$ 当 $x_0>1$ 时，$\dfrac{\ln x_0+x_0-1}{x_0-1}<a$ 恒成立 $\Leftrightarrow$ $\ln x_0+(1-a)(x_0-1)<0$ 对 $x_0\in\left(1,+\infty\right)$ 恒成立. ……4 分

令 $h(x_0)=\ln x_0+(1-a)(x_0-1)$，$(x_0>1)$.

则 $h'(x_0)=\dfrac{1}{x_0}+(1-a)=\dfrac{(1-a)x_0+1}{x_0}$

①当 $a\le 1$ 时，由 $x_0>1$，知 $h'\left(x_0\right)>0$ 恒成立，$\therefore h\left(x_0\right)$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 单调递增，

$\therefore h\left(x_0\right)>h\left(1\right)=0$，不满足题意的要求. ……5 分

②当 $1<a<2$ 时，$1-a<0$，$\dfrac{1}{a-1}>1$，$h'(x_0)=\dfrac{\left(1-a\right)x_0+1}{x_0}=\dfrac{(1-a)(x_0-\dfrac{1}{a-1})}{x_0}$，

$\therefore$ 当 $x_0\in\left(1,\dfrac{1}{a-1}\right)$，$h'\left(x_0\right)>0$；当 $x_0\in\left(\dfrac{1}{a-1},+\infty\right)$，$h'\left(x_0\right)<0$.

即 $h\left(x_0\right)$ 在 $\left(1,\dfrac{1}{a-1}\right)$ 单调递增；在 $\left(\dfrac{1}{a-1},+\infty\right)$ 单调递减.

所以存在 $t\in\left(1,+\infty\right)$ 使得 $h\left(t\right)>h\left(1\right)=0$，不满足题意要求. ……6 分

③当 $a\ge 2$ 时，$0<\dfrac{1}{a-1}\le 1$，对于 $x_0>1$，$h'\left(x_0\right)<0$ 恒成立，

$\therefore h\left(x_0\right)$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 单调递减，恒有 $h\left(x_0\right)<h\left(1\right)=0$，满足题意要求.

综上所述：当 $a\ge 2$ 时，直线 PQ 的斜率恒小于 a. ……7 分

（3）证明：令 $h(x)=g(x)-f(x)=xe^{x}-\ln x-x-1(x>0)$

则 $h'(x)=(x+1)\cdot e^{x}-\frac{1}{x}-1=\frac{(x+1)}{x}\cdot(x\cdot e^{x}-1)=\frac{(x+1)}{x}\cdot g(x)$，

$\because g'(x)=(x+1)\cdot e^{x}>0(x>0)$，$\therefore$ 函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的零点最多一个

又$\because$ $g(0)=-1<0, g(1)=e-1>0$ $\therefore$ 存在唯一的 $c\in(0,1)$ 使得 $g(c)=0$. ……9 分

且当 $x\in(0,c)$ 时，$g(x)<0$；当 $x\in(c,+\infty)$ 时，$g(x)>0$.

即当 $x\in(0,c)$ 时，$h'(x)<0$；当 $x\in(c,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$.

$\therefore$ $h(x)$ 在 $(0,c)$ 递减，在 $(c,+\infty)$ 递增，

从而 $h(x)\geq h(c)=ce^{c}-\ln c-c-1$

由 $g(c)=0$ 得 $ce^{c}-1=0$ 且 $\ln c+c=0$，$\therefore h(c)=0, h(x)\geq h(c)=0$

从而证得 $g(x)-f(x)\geq 0$ ……12 分

22. 解:(1)连结 ON. 因为 PN 切$\odot O$ 于 N, 所以 $\angle ONP=90^{\circ}$，$\angle ONB+\angle BNP=90^{\circ}$.

因为 $OB=ON$，所以 $\angle OBN=\angle ONB$.

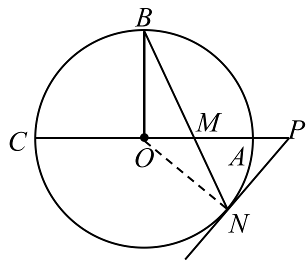
因为 $BO\perp AC$ 于O，所以 $\angle OBN+\angle BMO=90^{\circ}$，

所以 $\angle BNP=\angle BMO=\angle PMN$，所以 $PM=PN$.

所以 $PM^{2}=PN^{2}=PA\cdot PC$. ……………………5分

（2）$OM=2$，$BO=2\sqrt{3}$，$BM=4$.

因为 $BM\cdot MN=CM\cdot MA=(2\sqrt{3}+2)(2\sqrt{3}-2)=8$，所以 $MN=2$. ……10分



23．解:(1) 由 $\rho=\sin\theta+\cos\theta$ 得 $\rho^{2}=\rho\sin\theta+\rho\cos\theta$

则曲线C的直角坐标方程为$x^2+y^2=x+y$,即$(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}$………5 分

(2)将直线l的方程代入曲线C的直角坐标方程可得:$t^2-\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{1}{4}=0$

设两点对应参数分别为t_1,t_2,则$t_1+t_2=\frac{\sqrt{3}}{2},t_1t_2=-\frac{1}{4}$

所以$\frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}=\frac{1}{|t_1|}+\frac{1}{|t_2|}=\frac{|t_1-t_2|}{|t_1t_2|}=\frac{\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}}{|t_1t_2|}=2\sqrt{7}$………10 分

24. 解：$f(x)=|x-3|+|x-4|=\begin{cases}7-2x, x\le 3\\ 1 \quad ,3<x<4\\ 2x-7, x\ge 4\end{cases}$，…………2 分

（1）画出函数$f(x)$的图像如图，$f(x)=2$的解

为$x=\frac{5}{2}$或$x=\frac{9}{2}$。 ………………4 分

$\therefore f(x)\le 2$的解集为$\left[\frac{5}{2},\frac{9}{2}\right]$…………5 分

（2）$x\in[6,8]$，所以$f(x)\le ax+1$即$2x-7\le ax+1$，……………8 分

故$a\ge 2-\frac{8}{x}$,即$a\ge 2-\frac{8}{8}=1$……………10 分