数学（理）

2017.05

一、选择题(共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项)

1. 已知集合 $M=\{x\mid \ln x>0\}, N=\{x\mid x^2<4\}$，则 $M\cap N=$

（A）$(1,2)$　　（B）$[1,2)$　　（C）$(1,2]$　　（D）$[1,2]$

2. 如果 $z=\dfrac{2+i}{1+2i}$ 其中 i 为虚数单位，那么 $\bar{z}$ 的虚部为

（A）$-\dfrac{3}{5}$　　（B）-1　　（C）$\dfrac{3}{5}$　　（D）$-\dfrac{4}{3}$

3. 若曲线 $\begin{cases}x=-1+\cos\theta\\ y=2-\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）的对称中心为 $k=k+1$

（A）在直线 $y=2x$ 上　　（B）在直线 $y=-2x$ 上

（C）在直线 $y=x-1$ 上　　（D）在直线 $y=x+1$ 上

4. 若双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的离心率为 $\sqrt{3}$，则其渐近线方程为

（A）$y=\pm 2x$　　（B）$y=\pm\sqrt{2}x$

（C）$y=\pm\dfrac{1}{2}x$　　（D）$y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$

5. 设 $abcd\neq 0$，则“a,b,c,d 成等比数列”是“$ad=bc$”的

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件

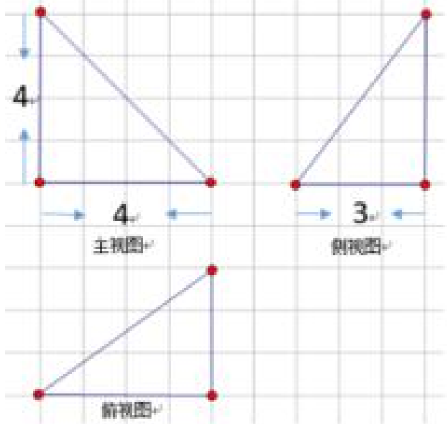
（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

6. 已知函数 $f(x)=x\sin x$, 记 $m=f(-\frac{1}{3}), n=f(\frac{1}{4})$, 则下列关系正确的是

（A）$m<0<n$　　（B）$0<n<m$　　（C）$0<m<n$　　（D）$n<m<0$

7. 某四面体的三视图如图所示,该四面体四个面的面积最大的是

（A）8　　（B）$6\sqrt{2}$　　（C）10　　（D）$8\sqrt{2}$



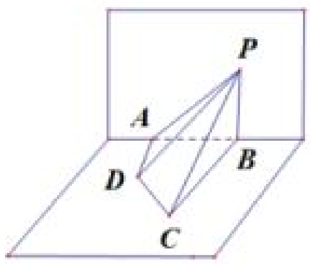
8. 如图所示, ΔPAB 所在的平面 α 和四边形所在的平面 β 互相垂直, 且 $AD\perp\alpha, BC\perp\alpha$, $AD=4, BC=8, AB=6$, 若 $\tan\angle ADP-2\tan\angle BCP=1$, 则动点 P 在平面 α 内的轨迹是

（A）双曲线的一部分

（B）线段

（C）椭圆的一部分

（D）以上都不是



第二部分 （非选择题　共 110 分）

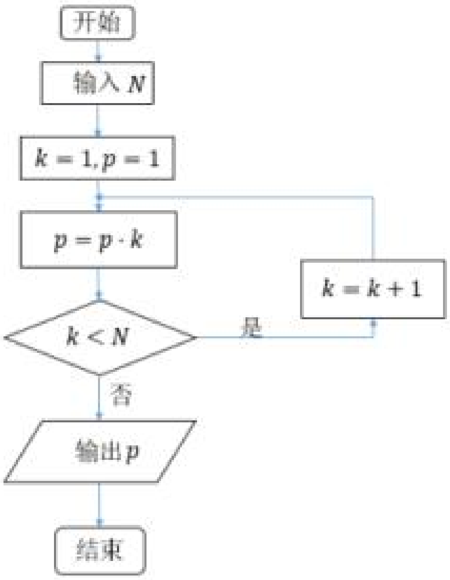
二、填空题(共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分)

9. 若实数 x, y 满足条件 $\begin{cases} x+y\geq 0 \\ x-y+3\geq 0 \\ 0\leq x\leq 3 \end{cases}$，则 $2x+y$ 的最大值为______.

10. 在 ΔABC 中，点 D 在线段 BC 上，且 $BD=2DC$，若 $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，则 $\dfrac{\lambda}{\mu}=$______.

11. 在二项式 $(x^2-\dfrac{1}{x})^5$ 的展开式中，含 x^4 的项的系数为______.

12. 执行下面的程序框图，如果输入的 N 是 5，那么输出的 P 是______.



13. 某商场对顾客实行购物优惠活动,规定一次购物付款总额:

（1）如果不超过200元,则不给予优惠;

（2）如果超过200元但不超过500元,则按标价给予9折优惠;

（3）如果超过500元,其500元内的部分按（2）条给予优惠,超过500元的部分给予7折优惠.

某人两次去购物,第一次购物付款170元,第二次购物付款423元,则第一次购物标价为______元;假设他一次性购买上述两次同样的商品,则应付款是______元.

14. 曲线C是平面内与三个定点$F_1(-1,0)$,$F_2(1,0)$和$F_3(0,1)$的距离的和等于$2\sqrt{2}$的点的轨迹.给出下列四个结论:

①曲线C关于y轴对称;

②曲线C上存在一点P,使得$|PF_3|=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$;

③若点P在曲线C上,则ΔF_1PF_2的面积的最大值为1;

④若点P在曲线C上,则ΔPF_2F_3的面积的最大值为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

其中所有真命题的序号是______.

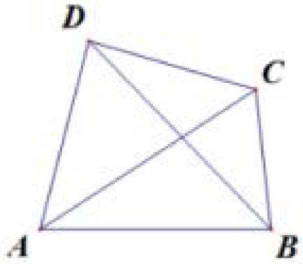
三、解答题(共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程)

15．（本小题满分 13 分）

如图,平行四边形 $ABCD$ 中，$AB=\sqrt{5},AD=2\sqrt{2},CD=\sqrt{3},\angle CBD=30^{\circ}$，$\angle BCD=120^{\circ}$.

（Ⅰ）求 $\angle ADB$；

（Ⅱ）求 $\triangle ADC$ 的面积.



16.（本小题满分 14 分）

以下茎叶图记录了甲、乙两个篮球队在 3 次不同比赛中的得分情况,乙队记录中有一个数字模糊,无法确认,假设这个数字具有随机性,并在图中以 m 表示

甲队			乙队		
	8	8			
3	2	9	0	2	m

（Ⅰ）在3次比赛中,求乙队平均得分超过甲队平均得分的概率;

（Ⅱ）当 $m=5$ 时,分别从甲、乙两队的3次比赛中各随机选取1次,记这2个比赛得分之差的绝对值为 X,求随机变量 X 的分布列和数学期望;

（Ⅲ）若在3次比赛中,甲队得分的方差比乙队得分的方差小,写出 m 的可能取值.（结论不要求证明）

（注:$s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]$,其中 $\bar{x}$ 为数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的平均数）

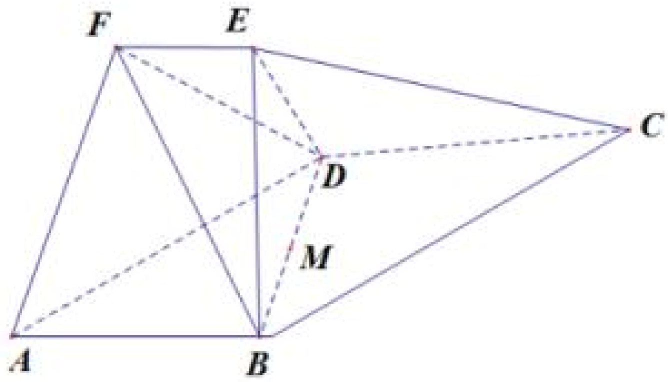
17. （本小题满分 14 分）

在如图所示的几何体中，四边形 $ABCD$ 为平行四边形，$\angle BDA=90^{\circ}$，$EB\perp ABCD$，$EF//AB$，$AB=2, EB=\sqrt{3}, EF=1, BC=\sqrt{3}$，且 M 是 BD 中点.

（Ⅰ）求证: $EM//$平面 ADF；

（Ⅱ）求二面角 $D-AF-B$ 的大小;

（Ⅲ）在线段 EB 上是否存在点 P，使得 CP 与 AF 所成角为 30°？若存在,求出 BP 的长;若不存在,请说明理由.



18. （本小题满分 14 分）

已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$，离心率$e=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$F$ 是椭圆的一个焦点,过 F 作 x 轴的垂线交椭圆于 A,B 两点,且$|AB|=2$.

（Ⅰ）求椭圆的标准方程;

（Ⅱ）点 Q 是 x 轴上的一个动点,直线 $x=t$ 与椭圆交于不同的两点 P,P',已知当点 P 距离点 Q 最近时,恰有 $PQ\perp P'Q$,求此时点 Q 的坐标.

19. （本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=kx-2\ln x$，$g(x)=\dfrac{k+2e}{x}$.

（Ⅰ）若函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，求 k 的取值范围;

（Ⅱ）曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 在 $[1,e]$ 上有公共点,求 k 的取值范围.

20. （本小题满分 13 分）

已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1 = m$（m为正整数），$a_n = \begin{cases} \dfrac{a_n}{2}, 当a_n为偶数时, \\ 3a_n + 1, 当a_n为奇数时. \end{cases}$

（Ⅰ）若$a_1 = 6$，直接写出m所有可能的取值；

（Ⅱ）对于某个给定的正整数$m(n \ge 8)$，能否存在奇数$m \le 2016$，使得$a_{2k-1}(k = 1, 2, \cdots, n)$均为奇数，若存在，请求出$m$所有可能的取值；若不存在，请说明理由；

（Ⅲ）据科学家推断，对于任意的正整数m，数列$\{a_n\}$中的项最终都会回到某些值循环，请写出这些循环项构成的集合A.

答案：

一．选择题：

1	2	3	4	5	6	7	8
C	B	B	B	A	B	C	A

二．填空题：

9	10	11	12	13	14
9	$\frac{1}{2}$	10	120	170；548	① ③

答案：①③

解答：设曲线 C 上任意一点坐标为 P (x,y) 由题意可知：C 的方程为

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-1)^2}=2\sqrt{2}$$

（1） 正确。

（2） 错误。若 $|PF_3|=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 则 $|PF_1|+|PF_2|=\frac{4\sqrt{2}}{3}<|F_1F_2|=2$

（3） 正确。因为 $|PF_1|+|PF_2|\le|PF_1|+|PF_2|+|PF_3|=2\sqrt{2}$

所有的 P 点都应该在椭圆 D: $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 内（含边界）曲线 C 与 D 有唯一公共点

$A(0,1)$，此时，三角形面积最大值为 1.

④三角形 PF_2F_3 面积的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$（错误），此时需要先考虑以 F_2,F_3 为焦点实半轴为 $\sqrt{2}$ 的椭圆 E，其短轴顶点到直线 $F_2F_3(x+y-1=0)$ 距离为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$，此时三角形 PF_2F_3 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，但是曲线 C 应该在此椭圆内部，所以三角形 PF_2F_3 的面积应小于 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

三、解答题

15.解：（Ⅰ）在 ΔBCD 中，由正弦定理得：

$BD=\dfrac{CD}{\sin\angle CBD}\cdot\sin\angle BCD=\dfrac{\sqrt{3}}{\frac{1}{2}}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3$，在$\Delta ABD$中，由余弦定理得：

$$\cos\angle ADB=\frac{AD^2+BD^2-AB^2}{2AD\cdot BD}=\frac{(2\sqrt{2})^2+3^2-(\sqrt{5})^2}{2\times2\sqrt{2}\times3}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

因为$\angle ADB$为三角形内角，所以$\angle ADB=45^\circ$.

（Ⅱ）因为$\angle CBD=30^\circ$，$\angle BCD=120^\circ$，所以$\angle CDB=30^\circ$.

因为$\sin\angle ADC=\sin(45^\circ+30^\circ)=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，

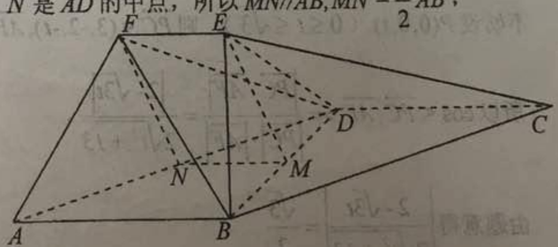
所以$S=\dfrac{1}{2}AD\cdot CD\cdot\sin\angle ADC=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$.

16.

（Ⅰ）$P(A)=\dfrac{4}{5}$；（Ⅱ）分布列略，$E(X)=\dfrac{8}{3}$；（Ⅲ）6，7，8，9.

17. 证明：（Ⅰ）取AD的中点N，连接MN,NF.

在$\triangle DAB$中，M是BD的中点，N是AD的中点，所以$MN//AB,MN=\dfrac{1}{2}AB$，



又因为$EF//AB,EF=\dfrac{1}{2}AB$，

所以$MN//EF$且$MN=EF$.

所以四边形$MNFE$为平行四边形，

所以$EM//FN$.

又因为$FN\subset$平面ADF，$EM\not\subset$平面ADF，

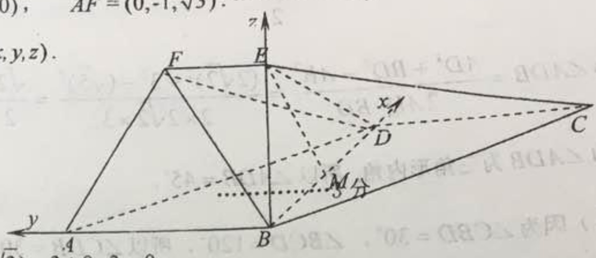
故$EM//$平面ADF. …………… 4分

解法二：因为$EB\perp$平面ABD，$AB\perp BD$，故以B为原点，建立如图所示的空间直角坐标系$B\text{-}xyz$. ……………1分

由已知可得 $B(0,0,0),A(0,2,0),D(3,0,0),$

$C(3,-2,0), E(0,0,\sqrt{3}), F(0,1,\sqrt{3}), M(\frac{3}{2},0,0)$

（I） $\overrightarrow{EM}=(\frac{3}{2},0,-\sqrt{3}), \overrightarrow{AD}=(3,-2,0)$， $\overrightarrow{AF}=(0,-1,\sqrt{3})$. ……………2 分



设平面 ADF 的一个法向量是 $\mathbf{n}=(x,y,z)$.

由 $\begin{cases}\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0,\\ \mathbf{n}\cdot\overrightarrow{AF}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}3x-2y=0,\\ -y+\sqrt{3}z=0.\end{cases}$

令 $y=3$，则 $\mathbf{n}=(2,3,\sqrt{3})$.

又因为 $\overrightarrow{EM}\cdot\mathbf{n}=(\frac{3}{2},0,-\sqrt{3})\cdot(2,3,\sqrt{3})=3+0-3=0$，

所以 $\overrightarrow{EM}\perp\mathbf{n}$，又 $EM\not\subset$ 平面 ADF，所以 $EM//$ 平面 ADF． ……………4 分

（II）由（I）可知平面 ADF 的一个法向量是 $\mathbf{n}=(2,3,\sqrt{3})$.

因为 $EB\perp$ 平面 ABD，所以 $EB\perp BD$.

又因为 $AB\perp BD$，所以 $BD\perp$ 平面 $EBAF$.

故 $\overrightarrow{BD}=(3,0,0)$ 是平面 $EBAF$ 的一个法向量.

所以 $\cos<\overrightarrow{BD},\mathbf{n}>=\dfrac{\overrightarrow{BD}\cdot\mathbf{n}}{|\overrightarrow{BD}|\cdot|\mathbf{n}|}=\dfrac{1}{2}$，又二面角 $D-AF-B$ 为锐角，

故二面角 $D-AF-B$ 的大小为 $60°$． ……………10 分

（III）假设在线段 EB 上存在一点 P，使得 CP 与 AF 所成的角为 $30°$.

不妨设 $P(0,0,t)$（$0\le t\le\sqrt{3}$），则 $\overrightarrow{PC}=(3,-2,-t), \overrightarrow{AF}=(0,-1,\sqrt{3})$.

所以 $\cos<\overrightarrow{PC},\overrightarrow{AF}>=\dfrac{|\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{AF}|}{|\overrightarrow{PC}|\cdot|\overrightarrow{AF}|}=\dfrac{|2-\sqrt{3}t|}{2\sqrt{t^2+13}}$，

由题意得 $\left|\dfrac{2-\sqrt{3}t}{2\sqrt{t^2+13}}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

化简得 $-4\sqrt{3}t=35$，

解得 $t=-\dfrac{35}{4\sqrt{3}}<0$.

所以在线段 EB 上不存在点 P，使得 CP 与 AF 所成的角为 30°. …………14 分

18．解析：(1) 不妨设 $F(c,0)$，由 A,B 在椭圆上知，$A(c,\frac{b^2}{a}),B(c,-\frac{b^2}{a})$，因此 $\frac{b^2}{a}=1$

再根据 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 可以解得 $a^2=4,b^2=2$.

所求椭圆方程 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$

(2) 设 $Q(q,0)$，椭圆上任意一个点为 $P(x,y)$

考虑 $|PQ|^2=(x-q)^2+y^2=(x-q)^2+2(1-\frac{x^2}{4})=\frac{1}{2}x^2-2qx+q^2-2,x\in[-2,2]$

上式当且仅当 $x=2q$ 时取得最小值（这里 $2q\in(-2,2)$，否则只有 $x=2$ 或 $x=-2$ 时取得最小值，与题意所述 P,P' 均为距离 Q 最近的点矛盾）

因此可知直线 PP' 方程就是 $x=2q$，即 $t=2q$

此时设 $P(t,s),Q(t,-s)$ 且 $s^2=2(1-\frac{t^2}{4})$

由于 $PQ\perp P'Q$，因此 $\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QP'}=(t-q)^2-s^2=(\frac{t}{2})^2-2(1-\frac{t^2}{4})=\frac{3}{4}t^2-2=0$

解得 $t=\pm\frac{2}{3}\sqrt{6}$　因此 $Q(\pm\frac{\sqrt{6}}{3},0)$

由易知，所以有 $(0,b)\subseteq(0,1)$；所以，$b\in(0,1]$

（III）设 $A(x_1,0),B(x_2,0)$

易得函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增；在 $(1,+\infty)$ 上单调递减

则 $0<x_1<1<x_2$；由（II）可得 $f(2-x_1)>f(x_1)=0$

所以，$2-x_1<x_2$即$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}>1$，所以，$f'(x_0)<0$

19. 解：（1）$f'(x)=k-\frac{2}{x}\le 0$对任意$x\in(0,+\infty)$恒成立，$\therefore k\le 0$

（2）$kx-2\ln x=\frac{k+2e}{x}(*)\Leftrightarrow kx-\frac{k+2e}{x}-2\ln x=0$

设$F(x)=kx-\frac{k+2e}{x}-2\ln x, x\in[1,e]$

方法一：

① $k\ge 0, x\in[1,e]$，

将导函数整理成：

$$F'(x)=k+\frac{k+2e}{x^2}-\frac{2}{x}=\frac{kx^2-2x+(k+2e)}{x^2}=\frac{k(x^2+1)+2(e-x)}{x^2}$$

可以看出$F'(x)>0$，$\therefore F(x)$在$[1,e]$上单调递增

$F(1)=-2e<0$，需要使$F(e)=ke-\frac{k+2e}{e}-2\ge 0, \therefore k\ge\frac{4e}{e^2-1}$

②$k<0$，由$(*)$变形得：$kx-2\ln x-\frac{k}{x}=\frac{2e}{x}$

令$h(x)=kx-2\ln x-\frac{k}{x}$，$h'(x)=k+\frac{k}{x^2}-\frac{2}{x}<0$　$h(x)$在$[1,e]$上单调递减

$\therefore h(e)\le h(x)\le h(1)$，$\therefore ke-\frac{k}{e}-2\le h(x)\le 0$

而$p(x)=\frac{2e}{x}$在$[1,e]$上单调递减，$\therefore p(e)\le p(x)\le p(1)$，即$2\le p(x)\le 2e$

$\therefore \forall x\in[1,e], h(x)\ne p(x)$,即$(*)$无解

综上：$k \geq \dfrac{4e}{e^2-1}$

方法二：$F'(x)=\dfrac{kx^2-2x+(k+2e)}{x^2}$

①当 $k>0$ 时，$F'(1)=2(k+e-1)>0, F'(e)=\dfrac{ke^2+k}{e^2}>0$

设 $h(x)=kx^2-2x+(k+2e)$

当 $k\geq 1$ 或时，函数 $h(x)$ 在 $[1,e]$ 是增函数，$h(x)>0, F'(x)>0$

当 $0<k\leq \dfrac{1}{e}$ 时，函数 $h(x)$ 在 $[1,e]$ 是减函数，$h(x)>0, F'(x)>0$

当 $\dfrac{1}{e}<k<e$ 时，$h(\dfrac{1}{k})=\dfrac{1}{k}-\dfrac{2}{k}+k+2e>0, \therefore F'(x)>0$

综上，$k>0$时，$F'(x)>0$，

$k=0$时，$F'(x)=\dfrac{2e-2x}{x^2}>0$

$\therefore F(x)$ 在 $[1,e]$ 上单调递增

$F(1)=-2e<0$，需要使 $F(e)=ke-\dfrac{k+2e}{e}-2\geq 0, \therefore k\geq \dfrac{4e}{e^2-1}$

② $k<0$ 同上。

20．解：(1) 4 ，5 ，32

(2) 因为当 a_n 为奇数时，$a_{n+1}=3a_n+1$ 一定是偶数，所以，若满足条件的 m 存在，

必然是 $a_1,a_3,a_5,\ldots,a_{2n-1}$ 为奇数，$a_2,a_4,a_6,\ldots,a_{2n}$ 为偶数。

因为$a_{2k+1}=\frac{a_{2k}}{2}=\frac{3a_{2k-1}+1}{2}$

$\therefore 2a_{2k+1}=3a_{2k-1}+1 \therefore a_{2k+1}+1=\frac{3}{2}(a_{2k-1}+1) \therefore a_{2k+1}+1=(\frac{3}{2})^{k}(a_1+1)(k\in N)$

$\therefore a_{2n-1}+1=(m+1)\cdot(\frac{3}{2})^{n-1} \therefore a_{2n-1}=\frac{3^{n-1}(m+1)}{2^{n-1}}-1$为奇数

设$a_{2n-1}=\frac{3^{n-1}(m+1)}{2^{n-1}}-1=2t-1(t\in N^{*})$，则$3^{n-1}(m+1)=2^{n}t$，所以$m+1$是$2^{n}$的倍数，

设所以$m=2^{n}p-1(p\in N^{*})$。易知此时$a_1,a_3,a_5,\ldots,a_{2n-3}$均为奇数，符合题意

又因为m≤ 2016且$2^{10}=1024, 2^{11}=2048$，所以

当$n\geq 11$不存在满足条件的m；当$8\leq n\leq 10$存在满足条件的m

当$n=8$时，$m=255,511,767,1023,1279,1535$或$1791$，

当$n=9$时，$m=511,1023$或1535，　当$n=10$时，$m=1023$

（3）$A=\{1,2,4\}$