

2017 届高三年级模拟试题（二）

数学（文科）

一、选择题：本大题共 12 个小题，每小题 5 分，共 60 分。每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求。

(1) 已知 $\frac{z}{(1+i)^2} = 1-i$ (i 为虚数单位)，则复数 z 在复平面内对应的点的坐标是 (B)

(A) $(2, -2)$ (B) $(2, 2)$ (C) $(-2, -2)$ (D) $(-2, 2)$

(2) 已知集合 $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{y | y = \log_2 x, x \in A\}$, 则 $A \cup B =$ (C)

(A) $\{1, 2\}$ (B) $[1, 2]$ (C) $\{0, 1, 2, 4\}$ (D) $[0, 4]$

(3) 已知 $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (-1, 1)$, 则 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影为 (A)

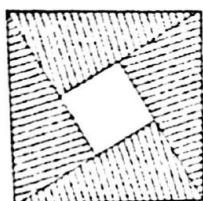
(A) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ (D) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

(4) 已知公比 $q \neq 1$ 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 1$, $S_3 = 3a_3$, 则 $S_5 =$ (D)

(A) 1 (B) 5 (C) $\frac{31}{48}$ (D) $\frac{11}{16}$

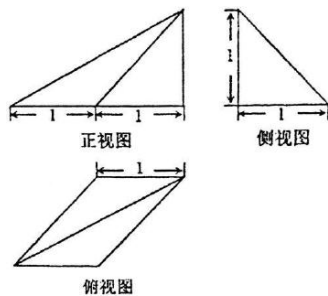
(5) 如图，“赵爽弦图”是由四个全等的直角三角形（阴影部分）围成一个大正方形，中间空出一个小正方形组成的图形，若在大正方形内随机取一点，该点落在小正方形的概率为 $\frac{1}{5}$ ，则途中直角三角形中较大锐角的正弦值为 (B)

(A) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (B) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$



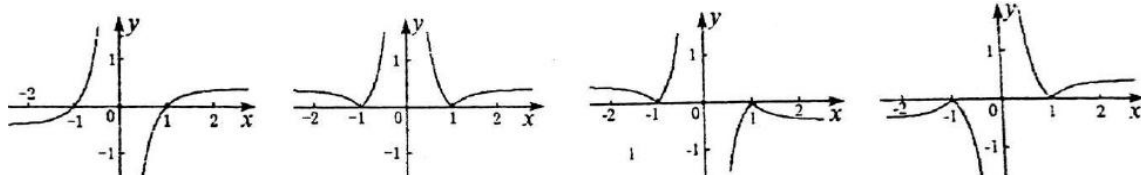
(6) 某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为 (D)

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{1}{3}$



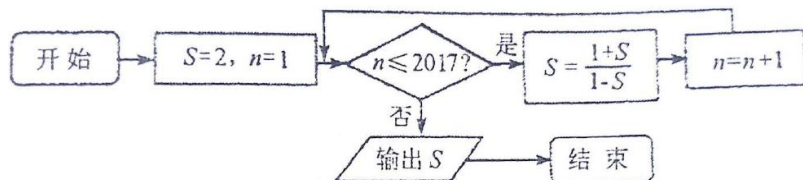
(7) 函数 $f(x) = \frac{\ln|x|}{x}$ 的图象大致为 (A)

(A) (B) (C) (D)



(8) 执行下面的程序框图，则输出 $S =$ (B)

(A) 2 (B) -3 (C) $-\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{3}$



(9) 已知实数 x, y 满足条件 $\begin{cases} 3x+y-7 \geq 0 \\ x+3y-13 \leq 0 \\ x-y-1 \leq 0 \end{cases}$ ，则 $z = |2x+y|$ 的最小值为 (C)

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

(10) 将函数 $f(x) = \cos 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位得到 $g(x)$ 的图象，若 $g(x)$ 在 $\left(-2m, -\frac{\pi}{6}\right)$ 和 $\left(3m, \frac{5\pi}{6}\right)$

上都单调递减，则实数 m 的取值范围为 (A)

(A) $\left[\frac{\pi}{9}, \frac{5\pi}{18}\right]$ (B) $\left[\frac{\pi}{9}, \frac{\pi}{3}\right]$ (C) $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{18}\right]$ (D) $\left[\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{12}\right]$

(11) 已知双曲线 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 的右焦点是抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点，直线 $y = kx + m$ 与抛物线相交于 A ,

B 两个不同的点，点 $M(2, 2)$ 是 AB 的中点，则 AOB (O 为坐标原点) 的面积是 (D)

(A) $4\sqrt{3}$ (B) $3\sqrt{13}$ (C) $\sqrt{14}$ (D) $2\sqrt{3}$

(12) 已知 $f(x) = x^2 \cdot e^x$ ，若函数 $g(x) = f^2(x) - kf(x) + 1$ 恰有三个零点，则下列结论正确的是 (D)

(A) $k = \pm 2$ (B) $k = \frac{8}{e^2}$ (C) $k = 2$ (D) $k = \frac{4}{e^2} + \frac{e^2}{4}$

二、填空题 (每题 5 分，满分 20 分，将答案填在答题纸上)

(13) 若命题 “ $\forall x \in (0, +\infty), x + \frac{1}{x} \geq m$ ” 是假命题，则实数 m 的取值范围是 $(2, +\infty)$.

(14) 已知 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, 则 $\sin 2\alpha = -\frac{24}{25}$.

(15) 已知点 O 是 $\triangle ABC$ 的内心， $\angle BAC = 60^\circ$, $BC = 1$, 则 $\triangle BOC$ 面积的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

(16) 已知三棱锥 $A-BCD$ 中， $AB = AC = BC = 2$, $BD = CD = \sqrt{2}$, 点 E 是 BC 的中点，点 A 在平面 BCD

射影恰好为 DE 的中点, 则该三棱锥外接球的表面积为 $\frac{60\pi}{11}$.

三、解答题 (本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(17) (本小题满分 12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = a_n + a_{n+1} (n \in N^*)$.

(I) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式; (II) 若 $c_n = 2^{a_n} \cdot (b_n - 1) (n \in N^*)$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

【解析】(I) 当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = 1$, 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} = n$,

又 $a_1 = 1$ 符合上式, $\therefore a_n = n$, $\therefore b_n = a_n + a_{n+1} = 2n + 1$.

(II) $c_n = 2^{a_n} (b_n - 1) = n \cdot 2^{n+1}$, $T_n = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + \cdots + (n-1) \cdot 2^n + n \cdot 2^{n+1}$ ①,

$2T_n = 1 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^4 + 3 \cdot 2^5 + \cdots + (n-1) \cdot 2^{n+1} + n \cdot 2^{n+2}$ ②,

① - ② 得, $-T_n = 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{n+1} - n \cdot 2^{n+2} = \frac{4(1-2^n)}{1-2} - n \cdot 2^{n+2} = (1-n) \cdot 2^{n+2} - 4$,

$\therefore T_n = (n-1) \cdot 2^{n+2} + 4$

(18) (本小题满分 12 分) 某商场举行有奖促销活动, 顾客购买一定金额的商品后即可抽奖, 抽奖规则如下:

1. 抽奖方案有以下两种, 方案 a : 从装有 1 个红球、2 个白球 (仅颜色不同) 的甲袋中随机摸出 1 个球, 若是红球, 则获得奖金 15 元; 否则, 没有奖金, 兑奖后将抽出的球放回甲袋中; 方案 b : 从装有 2 个红球, 1 个白球 (仅颜色不同) 的乙袋中随机摸出 1 个球, 若是红球, 则获得奖金 10 元; 否则, 没有奖金, 兑奖后将抽出的球放回乙袋中.

2. 抽奖的条件是, 顾客购买商品金额满 100 元, 可根据方案 a 抽奖一次; 满 150 元, 可根据方案 b 抽奖一次 (例如某顾客购买商品金额为 310 元, 则该顾客采用的抽奖方式可以有三种, 根据方案 a 抽奖三次或方案 b 抽奖两次或方案 a 、 b 各抽奖一次), 已知顾客 A 在该商场购买商品金额为 250 元.

(I) 若顾客 A 只选择方案 a 进行抽奖, 求其所获奖金为 15 元的概率;

(II) 若顾客 A 采用每种抽奖方式的可能性都相等, 求其最有可能获得的奖金数 (除 0 元外).

【解析】(I) 设 “获奖金为 15 元” 为事件 B , 则 $P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$.

(II) 若按方案 a 抽奖两次, 则获奖金为 15 元的概率为 $p_1 = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$, 获奖金为 30 元的概率为 $p_2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$, 若按方案 a 、 b 抽奖两次, 则获奖金为 15 元的概率为 $p_3 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$, 获奖金为 10 元的概率为 $p_4 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$, 获奖金为 25 元的概率为 $p_5 = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$, 故最有可能获得的奖金数为 15 元.

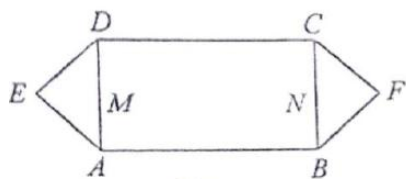
(19) (本小题满分 12 分) 如图 (1), 在平面六边形 $ABCDEF$ 中, 四边形 $ABCD$ 是矩形, 且 $AB = 4$, $BC = 2$, $AE = DE = BF = CF = \sqrt{2}$, 点 M , N 分别是 AD , BC 的中点, 分别沿直线 AD , BC 将 $\triangle ADE$, $\triangle BCF$ 翻折成如图 (2) 的空间几何体 $ABCDEF$.

(I) 利用下列结论 1 或结论 2, 证明: E 、 F 、 M 、 N 四点共面;

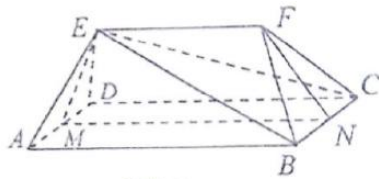
结论 1: 过空间一点作已知直线的垂面, 有且仅有一个.

结论 2: 过平面内一条直线作该平面的垂面, 有且仅有一个.

(II) 若二面角 $E-AD-B$ 和二面角 $F-BC-A$ 都是 60° ，求三棱锥 $E-BCF$ 的体积。



图(1)



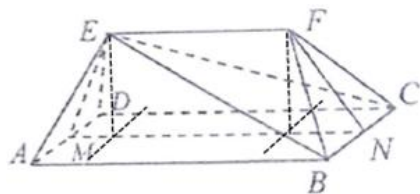
图(2)

【解析】(I) 由题意，点 E 在底面 $ABCD$ 的射影在 MN 上，可设为点 P ，同理，点 F 在底面 $ABCD$ 的射影在 MN 上，可设为点 Q ，则 $EP \perp$ 面 $ABCD$ ， $FQ \perp$ 面 $ABCD$ ， $\therefore$ 面 $EMP \perp$ 面 $ABCD$ ，面 $FNQ \perp$ 面 $ABCD$ ，又 $MN \subset$ 面 $ABCD$ ， $MN \subset$ 面 EMP ， $MN \subset$ 面 FNQ ，由结论 2：过平面内一条直线作该平面的垂面，有且仅有一个，则 E 、 F 、 M 、 N 四点共面。

(II) 若二面角 $E-AD-B$ 和二面角 $F-BC-A$ 都是 60° ，则 $\angle EMP = \angle FNQ = 60^\circ$ ，易得 $EM = FN = 1$ ，

$$\text{则 } MP = EM \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad EP = EM \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$V_{E-BCF} = V_{ABCDEF} - V_{E-ABCD} = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 \times 3 - \frac{1}{3} \times 4 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

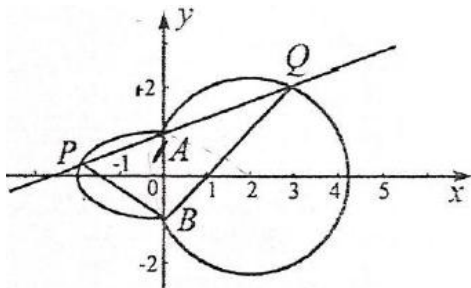


(20) (本小题满分 12 分) 如图，曲线 C 由左半椭圆 $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0, x \leq 0)$ 和圆

$N: (x-2)^2 + y^2 = 5$ 在 y 轴右侧的部分连接而成， A ， B 是 M 与 N 的公共点，点 P ， Q (均异于点 A ， B)

分别是 M ， N 上的动点。(I) 若 $|PQ|$ 的最大值为 $4 + \sqrt{5}$ ，求半椭圆 M 的方程；

(II) 若直线 PQ 过点 A ，且 $\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$ ， $\overrightarrow{BP} \perp \overrightarrow{BQ}$ ，求半椭圆 M 的离心率。



【解析】(I) 由已知得：当 P 为半椭圆与 x 轴的左交点， Q 为圆与 x 轴的右交点时， $|PQ|$ 会取得最大值，即

$$\sqrt{5} + 2 + a = 4 + \sqrt{5}, \quad \text{解得 } a = 2, \quad \text{由图像可得 } A(0,1), \quad \text{即 } b = 1, \quad \text{故半椭圆 } M \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 (x \leq 0).$$

(II) 设直线 PQ 方程为 $y = kx + 1$, $P(x_P, y_P)$, $Q(x_Q, y_Q)$, 联立 $\begin{cases} y = kx + 1 \\ (x-2)^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

得 $(k^2 + 1)x^2 + (2k - 4)x = 0$, 故 $x_A + x_Q = \frac{4-2k}{k^2+1}$, $\therefore x_Q = \frac{4-2k}{k^2+1}$, $y_Q = \frac{-k^2+4k+1}{k^2+1}$, 又 $\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$,

且 $\overrightarrow{AQ} = (x_Q, y_Q - 1)$, $\overrightarrow{AP} = (x_P, y_P - 1)$, 故 $\begin{cases} x_Q + x_P = 0 \\ y_Q + y_P = 2 \end{cases}$, $\therefore x_P = \frac{2k-4}{k^2+1}$, $y_P = \frac{3k^2-4k+1}{k^2+1}$,

又 $\overrightarrow{BP} \perp \overrightarrow{BQ}$, 且 $\overrightarrow{BQ} = (x_Q, y_Q + 1)$, $\overrightarrow{BP} = (x_P, y_P + 1)$,

$$x_P x_Q + (y_P + 1)(y_Q + 1) = \frac{-(2k-4)^2}{(k^2+1)^2} + \frac{(-k^2+4k+1)(3k^2-4k+1)}{(k^2+1)^2} + 2 + 1 = (k^2+1)(16k-12) = 0,$$

解得 $k = \frac{3}{4}$, 故 $P\left(-\frac{8}{5}, -\frac{1}{5}\right)$, 代入 $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$ 解得 $a^2 = \frac{8}{3}$, 故 $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$.

(21) (本小题满分 12 分) 已知函数 $f(x) = e^x - ax^2 - 2x (a \in R)$.

(I) 当 $a = 0$ 时, 求 $f(x)$ 的最小值; (II) 当 $a < \frac{e}{2} - 1$ 时, 证明: 不等式 $f(x) > \frac{e}{2} - 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立.

【解析】(I) 当 $a = 0$ 时, $f(x) = e^x - 2x$, $f'(x) = e^x - 2$, 令 $f'(x) = e^x - 2 = 0$ 解得 $x = \ln 2$,

x	$(-\infty, \ln 2)$	$\ln 2$	$(\ln 2, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

故当 $x = \ln 2$ 时, $f(x)$ 的最小值为 $f(\ln 2) = 2 - 2\ln 2$.

(II) $f'(x) = e^x - 2ax - 2$, $f(1) = e - 2 - 2a > e - 2 - 2\left(\frac{e}{2} - 1\right) = 0$, $f'(0) = -1 < 0$, 故存在 $x_0 \in (0, 1)$ 使

得 $f'(x_0) = 0$, 令 $h(x) = e^x - 2ax - 2$, 则当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $h'(x) = e^x - 2a > e^0 - 2\left(\frac{e}{2} - 1\right) = 3 - e > 0$,

故 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增, 且 $h(x_0) = 0$, $\therefore x = x_0$ 是 $h(x)$ 的唯一零点, 且在 $x = x_0$ 处 $f(x)$ 取得最小值

$f(x_0) = e^{x_0} - ax_0^2 - 2x_0 = e^{x_0} - x_0(ax_0 + 2)$, 又 $h(x_0) = 0$ 即 $e^{x_0} - 2ax_0 - 2 = 0$ 可得 $ax_0 + 1 = \frac{e^{x_0}}{2}$,

$\therefore f(x_0) = e^{x_0} - x_0\left(\frac{e^{x_0}}{2} + 1\right) = e^{x_0}\left(1 - \frac{x_0}{2}\right) - x_0$, 构造函数: $g(t) = e^t\left(1 - \frac{t}{2}\right) - t$, $g'(t) = e^t\left(\frac{1}{2} - \frac{t}{2}\right) - 1$,

二次求导可得 $g''(t) = e^t \left(-\frac{t}{2}\right)$, 故当 $t \in (0,1)$ 时, $g''(t) < 0$, 即 $g'(t)$ 在 $t \in (0,1)$ 单调递减,

则当 $t \in (0,1)$ 时, $g'(t) < g'(0) < 0$, 可得 $g(t) = e^t \left(1 - \frac{t}{2}\right) - t$ 在 $t \in (0,1)$ 单调递减,

$\therefore f(x_0) = e^{x_0} \left(1 - \frac{x_0}{2}\right) - x_0$ 在 $x_0 \in (0,1)$ 单调递减, $\therefore f(x)_{\min} = f(x_0) > e^1 \left(1 - \frac{1}{2}\right) - 1 = \frac{e}{2} - 1$, 得证.

请考生在 22、23 两题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题记分.

(22) (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 \cos \varphi \\ y = \sin \varphi \end{cases}$, (其中 φ 为参数). 以原点 O 为极点, x 轴的正半轴

为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho(\tan \alpha \cdot \cos \theta - \sin \theta) = 1$ (α 为常数, $0 < \alpha < \pi$, 且 $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$),

点 A, B (A 在 x 轴的下方) 是曲线 C_1 与 C_2 的两个不同交点.

(I) 求曲线 C_1 普通方程和 C_2 的直角坐标方程; (II) 求 $|AB|$ 的最大值及此时点 B 的坐标.

【解析】(I) 由 $\begin{cases} x = 2 \cos \varphi \\ y = \sin \varphi \end{cases}$ 得 $\begin{cases} \cos \varphi = \frac{x}{2} \\ \sin \varphi = y \end{cases}$, 平方, 相加得 $C_1: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, $C_2: \tan \alpha \cdot x - y - 1 = 0$.

(II) 将 C_2 化为参数方程: $\begin{cases} x = t \cos \alpha \\ y = -1 + t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数), 将 C_2 参数方程代入 C_1 ,

得 $\left(\frac{1}{4} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha\right) t^2 - 2 \sin \alpha \cdot t = 0$, $t_1 + t_2 = \frac{2 \sin \alpha}{\frac{1}{4} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}$, $t_1 \cdot t_2 = 0$,

$\therefore |AB| = \left| \frac{2 \sin \alpha}{\frac{1}{4} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} \right| = \left| \frac{8}{3 \sin \alpha + \frac{1}{\sin \alpha}} \right|$, $\because 0 < \alpha < \pi$, 且 $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, $\sin \alpha \in (0,1)$,

$\therefore |AB|_{\min} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, 此时点 B 的坐标为 $\left(\pm \frac{4\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

(23) (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = |x+m| + |2x-1|$ ($m > 0$). (I) 当 $m=1$ 时, 解不等式 $f(x) \geq 3$; (II) 当 $x \in [m, 2m^2]$ 时,

不等式 $\frac{1}{2} f(x) \leq |x+1|$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

【解析】(I) 当 $m=1$ 时, $f(x)=|x+1|+|2x-1|=\begin{cases} -3x, x < -1 \\ 2-x, -1 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 3x, x > \frac{1}{2} \end{cases}$, 由 $f(x) \geq 3$ 解得 $x \leq -1$ 或 $x \geq 1$.

(II) $\frac{1}{2}f(x) \leq |x+1| \Rightarrow \frac{1}{2}|x+m| + \frac{1}{2}|2x-1| \leq |x+1|$, $\because x \in [m, 2m^2]$, 且 $m > 0$,

$\therefore \frac{1}{2}x + \frac{m}{2} \leq |x+1| - \frac{1}{2}|2x-1| \Rightarrow m \leq 2|x+1| - |2x-1| - x$,

令 $t(x) = 2|x+1| - |2x-1| - x = \begin{cases} 3x+1, 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ 3-x, x > \frac{1}{2} \end{cases}$, 由题意得 $\begin{cases} m > 0 \\ m < 2m^2 \end{cases}$, 解得 $m > \frac{1}{2}$,

$\therefore t(x)_{\min} = t(2m^2) \geq m \Rightarrow m \leq 1$, $\therefore \frac{1}{2} < m \leq 1$.