

2006—2007 学年度上学期期末考试高一年级数学科试卷

参考答案

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分）

DCDCC CACBB BC

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分）

13. 24 14. $a \leq 1$ 15. $<$ 16. $\{0\} \cup [2, 2\sqrt{2}]$

三、解答题（本大题共 6 小题，共 74 分）

17. 解：（1）由条件知， $k_{BH} = \frac{2-1}{-3-2} = -\frac{1}{5}$ ， $k_{CH} = \frac{2-3}{-3+6} = -\frac{1}{3}$.

$\therefore AC \perp BH$ ， $CH \perp AB$

$\therefore k_{AC} \cdot k_{BH} = -1$ ， $k_{AB} \cdot k_{CH} = -1$

$\therefore k_{AC} = \frac{y_0-3}{x_0+6} = 5$ ， $k_{AB} = \frac{y_0-1}{x_0-2} = 3$ 4 分

$\therefore$ 直线 $AC: 5x - y + 33 = 0$

直线 $AB: 3x - y - 5 = 0$ 8 分

（2）由 $\begin{cases} 5x - y + 33 = 0 \\ 3x - y - 5 = 0 \end{cases}$

解得 $x = -19$ ， $y = -62$

$\therefore$ 顶点 A 的坐标为 $(-19, -62)$12 分

18. 解：（1） $p = \begin{cases} \frac{1}{5}t + 2, 0 < t \leq 20, t \in N^* \\ -\frac{1}{10}t + 8, 20 < t \leq 30, t \in N^* \end{cases}$ 3 分

（2） $Q = -t + 40, 0 < t \leq 30, t \in N^*$ 6 分

（3）当 $0 < t \leq 20$ 时，

$$y = (\frac{1}{5}t + 2)(-t + 40) = -\frac{1}{5}t^2 + 6t + 80 = -\frac{1}{5}(t - 15)^2 + 125 ;$$

当 $20 < t \leq 30$ 时,

$$y = (-\frac{1}{10}t + 8)(-t + 40) = \frac{1}{10}t^2 - 12t + 320 = \frac{1}{10}(t - 60)^2 - 40 .$$

$$\therefore y = \begin{cases} -\frac{1}{5}(t-15)^2 + 125, 0 < t \leq 20, t \in N^* \\ \frac{1}{10}(t-60)^2 - 40, 20 < t \leq 30, t \in N^* \end{cases} \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

若 $0 < t \leq 20$, 则当 $t = 15$ 时, $y_{\max} = 125$ 万元;

当 $20 < t \leq 30$ 时, y 随 t 的增大而减小, $y < \frac{1}{10}(20 - 60)^2 - 40 = 120$ 万元.

答: 在 30 天中的第 15 天, 日交易额取得最大值 125 万元. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

19. 解: (1) 设 $M(x, y)$ 为曲线上任意一点, 由条件知 $\frac{|MO|}{|MA|} = \lambda \ (\lambda > 0)$

$$\therefore \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{(x-3)^2 + y^2}} = \lambda$$

两边平方并化简得 $(1 - \lambda^2)x^2 + (1 - \lambda^2)y^2 + 6\lambda^2x - 9\lambda^2 = 0 \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

当 $\lambda > 0$ 且 $\lambda \neq 1$ 时, 方程化为 $x^2 + y^2 + \frac{6\lambda^2}{1 - \lambda^2}x - \frac{9\lambda^2}{1 - \lambda^2} = 0$,

$$\therefore (\frac{6\lambda^2}{1 - \lambda^2})^2 - 4(-\frac{9\lambda^2}{1 - \lambda^2}) = \frac{36\lambda^2}{(1 - \lambda^2)^2} > 0$$

$\therefore$ 曲线 C 是一个圆. $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

(2) $\lambda = \frac{1}{2}$ 时的曲线 C 方程为 $x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$ 即 $(x+1)^2 + y^2 = 4$. 其圆心

为 $C(-1, 0)$, 半径为 2.

由条件知，点 $B(3,3)$ 关于 x 轴的对称点 $B'(3,-3)$ 在反射光线所在的直线上，光线从点

B 到点 D 的路程等于 $B'D$ 长.

.....9 分

$$|B'D| = \sqrt{|B'C|^2 - 2^2} = \sqrt{(-1-3)^2 + (0+3)^2 - 4} = \sqrt{21}.$$

$\therefore$ 光线从点 B 到点 D 的路程为 $\sqrt{21}$12 分

20. 解：(1) 四棱锥 $P-ABCD$ 如图：

分别取 PC 、 PD 中点为 F 、 G

在等腰直角三角形 PAD 中， $AG \perp PD$

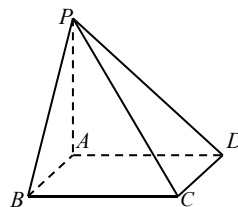
$\because PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， $CD \subset$ 平面 $ABCD$

$\therefore PA \perp CD$ ，又 $CD \perp AD$

$\therefore CD \perp$ 平面 PAD ，又 $\because AG \subset$ 平面 PAD

$\therefore CD \perp AG$

故 $AG \perp$ 平面 PCD3 分



连结 F, G ，则 $FG \parallel CD$ ，且 $FG = \frac{1}{2}CD$

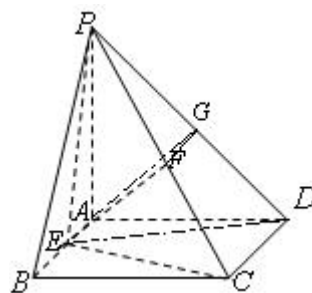
又 $AE \parallel CD$ ，且 $AE = \frac{1}{2}CD$

$\therefore AE \parallel FG$ ， $AE = FG$

$\therefore AEF G$ 为平行四边形， $EF \parallel AG$

$\therefore EF \perp$ 平面 PCD ，又 $EF \subset$ 平面 PEC

$\therefore$ 平面 $PEC \perp$ 平面 PCD6 分



(2) 设点 D 到平面 PEC 的距离为 h ，连结 ED

$$\triangle PEC \text{ 中, } PE = EC = \frac{\sqrt{5}}{2}a, \quad PC = \sqrt{3}a$$

$$\text{得 } S_{\triangle PEC} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}a \times \sqrt{3}a = \frac{\sqrt{6}}{4}a^2$$

$$\text{又 } \because PA \perp \text{平面 } ABCD, \quad S_{\triangle ECD} = \frac{1}{2}a^2$$

$$\text{由 } V_{D-PEC} = V_{P-ECD} \quad \text{得 } \frac{1}{3} \times h \times S_{\triangle PEC} = \frac{1}{3} \times PA \times S_{\triangle ECD}$$

$$\therefore h = \frac{PA \times S_{\triangle ECD}}{S_{\triangle PEC}} = \frac{a \times \frac{1}{2} a^2}{\frac{\sqrt{6}}{4} a^2} = \frac{\sqrt{6}}{3} a$$

故点 D 到平面 PEC 的距离为 $\frac{\sqrt{6}}{3} a$12 分

21. 解: 由 $\begin{cases} y = x^2 + mx + 2 \\ y = x + 1 \end{cases}$ 得 $x^2 + mx + 2 = x + 1$

即 $x^2 + (m-1)x + 1 = 0 \quad x \in [0, 2]$

由条件知, 上述关于 x 的方程在 $[0, 2]$ 内必有解.3 分

设 $f(x) = x^2 + (m-1)x + 1$

①若在 $[0, 2]$ 内只有一个解,

则 $f(0)f(2) = 2m + 3 \leq 0$

得 $m \leq -\frac{3}{2}$7 分

②若在 $[0, 2]$ 有两个解 (含两个相同的解),

$$\text{则} \begin{cases} \Delta = (m-1)^2 - 4 \geq 0 \\ f(0) = 1 \geq 0 \\ f(2) = 2m + 3 \geq 0 \\ 0 < -\frac{m-1}{2} < 2 \end{cases} \quad \text{得} \begin{cases} m \leq -1 \text{ 或 } m \geq 2 \\ m \in R \\ m \geq -\frac{3}{2} \\ -3 < m < 1 \end{cases} \quad \therefore -\frac{3}{2} \leq m \leq -1.$$

由①②知: $m \leq -1$12 分

22. 解: (1) 由性质, 可知函数 $g(x) = 2x + \frac{a}{x} = 2(x + \frac{\frac{a}{2}}{x}) (a > 0)$ 在 $(0, \sqrt{\frac{a}{2}}]$ 内为减函数.

依题意, $(0, 1] \subset (0, \sqrt{\frac{a}{2}}]$

故 $\sqrt{\frac{a}{2}} \geq 1$ 得 $a \geq 2$

$\therefore a$ 的取值范围是 $[2, +\infty)$4 分

(2) 设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$

$\therefore MP \perp MQ \quad \therefore k_{MP} \cdot k_{MQ} = -1$

$\therefore \frac{(y_1 - b)(y_2 - b)}{x_1 x_2} = -1$ 即 $x_1 x_2 + (y_1 - b)(y_2 - b) = 0$ 6 分

又 $y_1 = kx_1, y_2 = kx_2$

$\therefore x_1 x_2 + (kx_1 - b)(kx_2 - b) = 0$ 即 $(1 + k^2)x_1 x_2 - kb(x_1 + x_2) + b^2 = 0$ (*)

由 $\begin{cases} y = kx \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$ 得 $(1 + k^2)x^2 - 2(1 + k)x + 1 = 0$

由 $\Delta = [2(1 + k)]^2 - 4(1 + k^2) = 8k > 0$ 得 $k > 0$ ①

且 $x_1 + x_2 = \frac{2(1 + k)}{1 + k^2}, x_1 x_2 = \frac{1}{1 + k^2}$ 代入 (*) 中得

$(1 + k^2) \frac{1}{1 + k^2} - kb \frac{2(1 + k)}{1 + k^2} + b^2 = 0$

即 $\frac{2k(1 + k)}{1 + k^2} = b + \frac{1}{b}$11 分

由性质知, $b + \frac{1}{b}$ 在 $b \in [1, +\infty)$ 时为增, 故 $b + \frac{1}{b} \geq 1 + \frac{1}{1} = 2$.

$\therefore \frac{2k(1 + k)}{1 + k^2} \geq 2$, 得 $k \geq 1$ ②

由①②得 $k \geq 1$14 分