

2013—2014 学年度上学期期末考试 高二年级文科 数学试卷答案

一、选择题： BCADB CBADC AD

二、填空题： 13. $\{x \mid x < -2 \text{ 或 } 0 < x < 1\}$ 14. -2^{n-1} 15. $-\frac{1}{3}$ 16. $\frac{20}{3}$

三、解答题

17. 解：(1) $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 6$,

由已知可得 $f'(1) = 3a + 2b + 6 = 0$, $f'(2) = 3a \times 2^2 + 2b \times 2 + 6 = 0$.

解得 $a = 1, b = -\frac{9}{2}$5 分

(2) 由 (1) 知 $f'(x) = 3x^2 - 9x + 6 = 3(x^2 - 3x + 2) = 3(x-1)(x-2)$.

当 $x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (1, 2)$ 时, $f'(x) < 0$.

因此 $f(x)$ 的单调增区间是 $(-\infty, 1), (2, +\infty)$, $f(x)$ 的单调减区间是 $(1, 2)$10 分

18. 解：由已知得： $B = A(1 + q^n)$, $C = A(1 + q^n + q^{2n})$ 4 分

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 - A(B + C) &= A^2 \{1 + (1 + q^n)^2 - [(1 + q^n) + (1 + q^n + q^{2n})]\} \quad \dots\dots 8 \text{ 分} \\ &= A^2 \{1 + 1 + 2q^n + q^{2n} - [(1 + q^n) + (1 + q^n + q^{2n})]\} \\ &= 0. \dots\dots 10 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$\therefore A^2 + B^2 = A(B + C) \quad \dots\dots 12 \text{ 分}$$

注：使用等比数列求和公式不讨论 $q = 1$ 扣 3 分

19. 解：(1) $y' = \frac{x}{p}$ 2 分

故 $\frac{2}{p} = 2 \Rightarrow p = 1$ 4 分

抛物线方程为： $x^2 = 2y$ 6 分

$$(2) \text{ 联立 } \begin{cases} 2x - y + 2 = 0 \\ x^2 = 2y \end{cases} \Rightarrow x^2 - 4x - 4 = 0 \quad A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$$

$$x_1 + x_2 = 4, x_1 \cdot x_2 = -4 \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$y_1 y_2 = \frac{x_1^2 \cdot x_2^2}{4} = 4 \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$

故 $x_1 \cdot x_2 + y_1 y_2 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$, 故 $\angle AOB = 90^\circ$12 分

20. 解：(1) $a_2 = 15$, $a_3 = 63$ 4 分

(2) $n(S_{n+1} - S_n) = (2n + 3)S_n$ 6 分

$$\frac{S_{n+1}}{n+1} = 3 \frac{S_n}{n} \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

故 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 是以 $\frac{S_1}{1} = 3$ 为首项, 3 为公比的等比数列.10 分

$$\frac{S_n}{n} = 3^n \Rightarrow S_n = n3^n \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

21. 解: (1) 因为函数 $f(x) = x^2$ 的定义域 $F = (-\infty, +\infty)$, 函数 $g(x) = a \ln x$ 的定义域

$$G = (0, +\infty), \text{ 所以 } h(x) = \begin{cases} x^2 + a \ln x, & x > 0, \\ x^2, & x \leq 0. \end{cases} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) 当 $x \leq 0$ 时, 函数 $h(x) = x^2$ 单调递减,

所以函数 $h(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上的最小值为 $h(0) = 0$. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

当 $x > 0$ 时, $h(x) = x^2 + a \ln x$.

若 $a = 0$, 函数 $h(x) = x^2$. 此时, 函数 $h(x)$ 存在最小值 $h(0) = 0$. $\dots\dots 6 \text{ 分}$

若 $a > 0$, 因为 $h'(x) = 2x + \frac{a}{x} = \frac{2x^2 + a}{x} > 0$,

所以函数 $h(x) = x^2 + a \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 此时, 函数 $h(x)$ 不存在最小值. $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

$$\text{若 } a < 0, \text{ 因为 } h'(x) = \frac{2x^2 + a}{x} = \frac{2\left(x + \sqrt{-\frac{a}{2}}\right)\left(x - \sqrt{-\frac{a}{2}}\right)}{x},$$

所以函数 $h(x) = x^2 + a \ln x$ 在 $\left(0, \sqrt{-\frac{a}{2}}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\sqrt{-\frac{a}{2}}, +\infty\right)$ 上单调递增. 此时, 函数 $h(x)$ 的最小值为 $h\left(\sqrt{-\frac{a}{2}}\right)$.

$$\text{因为 } h\left(\sqrt{-\frac{a}{2}}\right) = -\frac{a}{2} + a \ln \sqrt{-\frac{a}{2}} = -\frac{a}{2} + \frac{a}{2} \ln\left(-\frac{a}{2}\right) = -\frac{a}{2} \left[1 - \ln\left(-\frac{a}{2}\right)\right],$$

$$\text{所以当 } -2e \leq a < 0 \text{ 时, } h\left(\sqrt{-\frac{a}{2}}\right) \geq 0, \text{ 当 } a < -2e \text{ 时, } h\left(\sqrt{-\frac{a}{2}}\right) < 0.$$

综上所述, 当 $a > 0$ 时, 函数 $h(x)$ 没有最小值; 当 $-2e \leq a \leq 0$ 时, 函数 $h(x)$ 的最小值为 $h(0) = 0$; 当 $a < -2e$ 时, 函数 $h(x)$ 的最小值为

$$h\left(\sqrt{-\frac{a}{2}}\right) = -\frac{a}{2} \left[1 - \ln\left(-\frac{a}{2}\right)\right]. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

22. 解: (1) 设椭圆方程为 $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$).

双曲线 $\frac{4y^2}{3} - 4x^2 = 1$ 的焦点坐标分别为 $(0, 1)$ 和 $(0, -1)$ $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

$$\therefore \text{椭圆} \therefore c = 1, \text{ 即 } a^2 - b^2 = 1 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

又椭圆过点 $P\left(\frac{3}{2}, 1\right)$, $\therefore \frac{1}{a^2} + \frac{9}{4b^2} = 1 \dots\dots\dots ②$

由① ②得 $a^2 = 4$, $b^2 = 3$, $\therefore$ 所求椭圆方程为 $\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{3} = 1 \dots\dots\dots 4$

(2) 当 l 斜率不存在时 $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB}$, 故设 $l: y = kx + 1 (k > 0)$

带入椭圆方程得: $(3k^2 + 4)x^2 + 6kx - 9 = 0$ 且 $\Delta > 0$ 恒成立 $\dots\dots\dots 6$ 分

设 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$, 由已知 $x_1 + x_2 = \frac{4}{7}x_1 = -\frac{6k}{3k^2 + 4} \dots\dots\dots 8$ 分

$\therefore x_1 = \frac{-21k}{2(3k^2 + 4)}$, $x_2 = \frac{9k}{2(3k^2 + 4)} \dots\dots\dots 10$ 分

由 $x_1 \cdot x_2 = \frac{-9}{3k^2 + 4}$ 解得 $k = \frac{4}{3} \dots\dots\dots 12$ 分