

三胜三校（理科）数学试卷二

一、选择题

1、若 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{5, 6, 7\}$, 则 $(C_U A) \cap (C_U B) = (\quad)$

- (A) $\{4, 8\}$ (B) $\{2, 4, 6, 8\}$ (C) $\{1, 3, 5, 7\}$ (D) $\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$ $\frac{5\pi}{6}$

2、已知复数 $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, 则 $\bar{z} + |z| =$

- (A) $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (B) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (C) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (D) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

3、已知 $\triangle ABC$, 点 D、E 是 ABC 所在平面内的点, 且满足 $2\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$, $2\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$ 则 $\overrightarrow{AE} = (\quad)$

- A. $\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ B. $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ C. $\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ D. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

4、函数 $h(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{4})$ 的图像与 $f(x)$ 的图像关于点 $(0, 1)$ 对称, 则函数 $f(x)$ 可由 $h(x)$ 经过_____的变换得到

- (A) 向上平移 2 个单位, 向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位 (B) 向上平移 2 个单位, 向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位
 (C) 向下平移 2 个单位, 向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位 (D) 向下平移 2 个单位, 向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位

5、已知条件 $p: x \geq k$, 条件 $q: \frac{3}{x+1} < 1$, 如果 p 是 q 的充分不必要条件, 则 k 的取值范围是(\quad)

- A. $[2, +\infty)$ B. $[1, +\infty)$ C. $(2, +\infty)$ D. $(-\infty, -1]$

6、已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $\frac{c-b}{c-a} = \frac{\sin A}{\sin C + \sin B}$. 则 $\angle B = (\quad)$

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{3\pi}{4}$

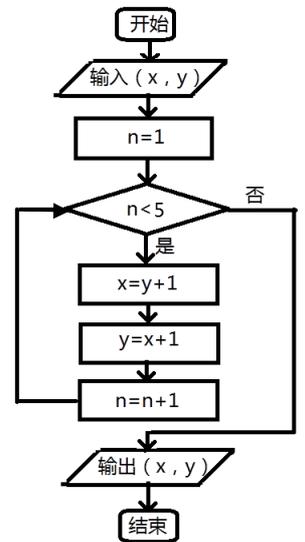
7、一个射箭运动员在练习时只记射中 9 环和 10 环的成绩, 未击中 9 环或 10 环就以 0 环记。某运动员在练习时击中 10 环的概率为 a , 击中 9 环的概率为 b , 击在其余位置的概率为 $c(a, b, c \in [0, 1])$, 如果已知该运动员一次射箭击中环数的期望为 9 环, 则当 $\frac{10}{a} + \frac{1}{9b}$ 取最小值时, c 的值为 (\quad)。

- A. $\frac{1}{11}$ B. $\frac{2}{11}$ C. $\frac{5}{11}$ D. 0

8、已知某算法的流程图如图所示, 输入的数 x 和 y 为自然数, 若已知输出的最后一个数对为 $(13, 14)$, 则开始输入的 (x, y) 可能为 ()

- A. $(0, 6)$ B. $(6, 7)$ C. $(4, 5)$ D. $(5, 4)$

9、



10、已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{m^2} + y^2 = 1$ 和双曲线 $C_2: \frac{x^2}{n^2} - y^2 = 1$ 有相同的焦点 F_1, F_2 , 且 C_1 与 C_2 的离心率分别为 e_1 与 e_2 , 若 P

是它们的一个交点, O 为坐标原点, 则 A

- (A) $|OP| = \sqrt{m^2 - 1}$ (B) $|OP| = e_2 \sqrt{n^2 + 1}$ (C) $|OP| = e_1 \sqrt{m^2 - 1}$ (D) $|OP| = n^2 + 1$

11、已知方程 $\frac{|\cos x|}{x} = k$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不同的解 α, β ($\alpha < \beta$), 则下列的四个命题

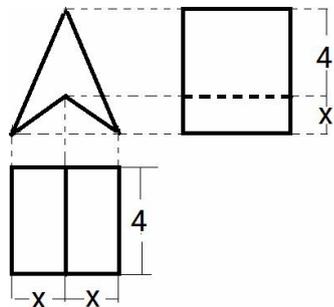
- A. $\sin 2\alpha = 2\alpha \cos^2 \alpha$ B. $\cos 2\alpha = 2\alpha \sin^2 \alpha$ C. $\sin 2\beta = -2\beta \sin^2 \beta$ D. $\cos 2\beta = -2\beta^2 \sin^2 \beta$

12、设函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 对任意 $x \in R$ 都有 $f'(x) > f(x)$ 成立, 则 ()

- A. $f(\ln 2014) > 2014f(0)$ B. $f(\ln 2014) = 2014f(0)$
C. $f(\ln 2014) < 2014f(0)$ D. $f(\ln 2014)$ 与 $2014f(0)$ 的大小不确定

二、填空题

13、某几何体的三视图如图所示, 已知该几何体的体积为 16, 则该几何体的表面积为



14、在区间 $[0, 2]$ 和 $[0, 1]$ 分别取一个数, 记为 x, y , 则 $y \leq -x^2 + 2x$ 的概率

为 $\frac{2}{3}$.

15、如果斜率不为零的一条直线和双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b > 0$) 的两条渐近线相交于 M, N 两点, 和双曲线的两支相交于

P, Q 两点, 设 MN 中点为 A , PQ 中点为 B , 则 \overrightarrow{OA} 与 \overrightarrow{OB} 的夹角的取值集合为 _____

16、 P 为正方体对角线 BD_1 上的点, 且 $BP = \lambda BD_1$ ($\lambda \in (0, 1)$), 下面结论: ① $A_1D \perp C_1P$; ② 若 $BD_1 \perp$ 平面 PAC ,

则 $\lambda = \frac{1}{3}$; ③ 若 $\triangle PAC$ 为钝角三角形, 则 $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$; ④ $\lambda \in (\frac{2}{3}, 1)$, 则 $\triangle PAC$ 为锐角三角形, 则. 其中正确的结论

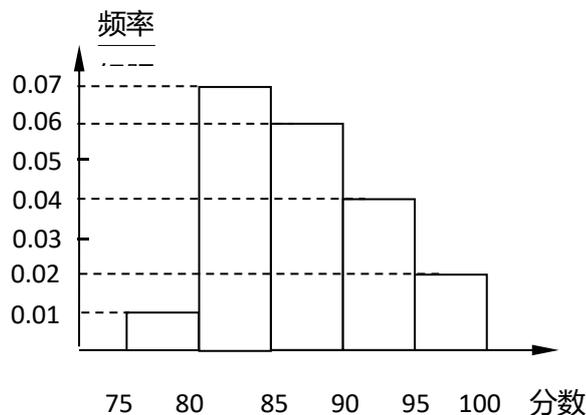
为 _____.(写出所有正确结论的序号)

其中所有真命题的序号是 _____

三、解答题

17、

18、某个团购网站为了更好的满足消费者, 对在其网站发布的团购产品展开了用户调查, 每个用户在使用了团购产品后可以对该产品进行



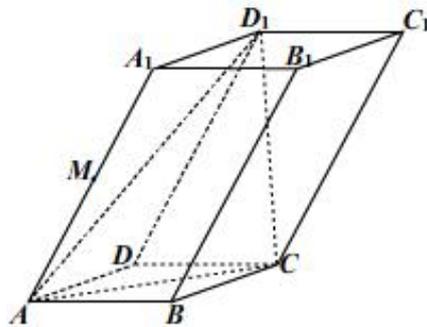
打分, 打分的最高分是 100 分。上个月该网站共登出了 100 份团购产品, 所有用户打分的平均分作为该产品的参考分值, 将这些产品按照成绩分成以下几组: 第一组 $[75, 80)$, 第二组 $[80, 85)$, 第三组 $[85, 90)$, 第四组 $[90, 95)$, 第五组 $[95, 100)$, 得到的频率分布直方图如图所示。

- (1) 分别求第 3, 4, 5 组的频率;
- (2) 某人决定在得分较高的第 3, 4, 5 组中用分层抽样的方式抽取 6 个产品。
- ① 已知甲产品和乙产品均在第三组, 求甲、乙同时被选中的概率;
- ② 该人决定在这 6 个产品中随机抽取 2 个在周末消费, 设第 4 组中有 X 个产品被消费, 求 X 的分布列和数学期望。

19、(本小题满分 12 分)

平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = AD = 2$, $AA_1 = 2\sqrt{3}$, $\angle A_1AB = \angle A_1AD$, $\angle BAD = \angle A_1AC = 60^\circ$. 点 M 是棱 AA_1 的中点。

- (I) N 为棱 BC 的中点, 求证: $MN \parallel$ 平面 ACD_1 ;
- (II) 求二面角 $A - CD_1 - C_1$ 的余弦值



20、已知抛物线 C_1 的顶点在原点, 焦点在 y 正半轴上, 斜率为 1 的直线 l 过 C_1 的焦点与 C_1 交于 A, B 两点, 且 $|AB| = 32$.

- (I) 求 C_1 的标准方程;
- (II) 椭圆 $C_2: \frac{y^2}{8} + \frac{x^2}{4} = 1$, 设斜率不为 0 的动直线 m 与 C_2 有且只有一个公共点 P , 且与 C_1 的准线相交于点 Q , 试探究: 在坐标平面内是否存在定点 M , 使得以 PQ 为直径的圆恒过点 M ? 若存在, 求出点 M 的坐标; 若不存在, 请说明理由。

21、(本小题满分 12 分) 已知 $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}$ ($a > 0$)

- (I) 求证: $f(x)$ 必有两个极值点, 一个是极大值点, 一个是极小值点;
- (II) 设 $f(x)$ 的极大值点为 x_1 , 极小值点 x_2 , $f(x_1) = 1$, $f(x_2) = -1$, 求 a, b 的值;

(III) 在 (II) 的条件下, 设 $g(x) = f(e^x)$, 若对于任意实数 x 有 $g(x) < \frac{2}{2+mx^2}$ 恒成立, 求 m 的取值范围.

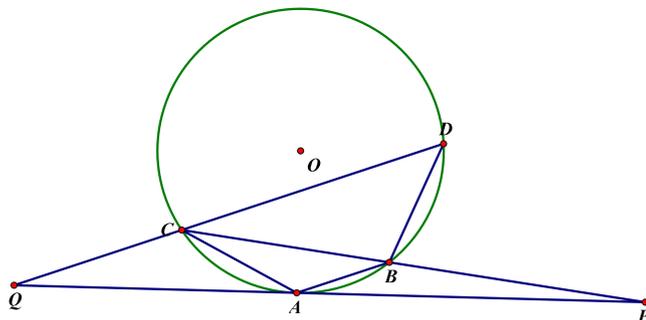
四、选做题

22. 选修 4-1: 几何证明选讲

已知 PQ 与圆 O 相切于点 A , PBC 交圆于 B, C 两点, D 是圆上一点, 满足 $AB \parallel CD$, DC 的延长线交 PQ 于点 Q ,

(I) 求证: $AC^2 = AQ \cdot AD$

(II) 若 $AQ=2AP$, $AB=\sqrt{3}$, $BP=2$, 求四边形 $ABDC$ 的面积



23. 选修 4-4, 参数方程

已知曲线 C_1 的参数方程是 $\begin{cases} x = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta, \\ y = 2t \sin \theta \cos \theta. \end{cases}$ ($t > 0$, $\frac{\pi}{12} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{8}$, θ 为参数), 曲线 C_2 的极坐标方程是

$$\rho = 2 \cos \theta + 4 \sin \theta.$$

(I) 求曲线 C_1 的普通方程和 C_2 的直角坐标方程;

(II) 若曲线 C_1 与曲线 C_2 没有公共点, 求实数 t 的取值范围.

解: (I) $x = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, $y = 2t \sin \theta \cos \theta = t \sin 2\theta$.

$$\text{又} \because \frac{\pi}{12} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{8} \quad \therefore \frac{\pi}{6} \leq 2\theta \leq \frac{3\pi}{4} \quad \therefore \frac{1}{2} \leq \sin 2\theta \leq 1$$

$$\because t > 0, \quad \therefore \frac{1}{2}t \leq y \leq t$$

所以曲线 C_1 的普通方程为 $x = 1$ ($\frac{1}{2}t \leq y \leq t$)

$$\because \rho = 2 \cos \theta + 4 \sin \theta \quad \therefore \rho^2 = 2\rho \cos \theta + 4\rho \sin \theta$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 2x + 4y,$$

所以曲线 C_2 的直角坐标方程为 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$.

(II) 由 (I) 知曲线 C_2 过 $(1, 2+\sqrt{5})$ 和 $(1, 2-\sqrt{5})$, $\because t > 0$

所以由曲线 C_1 与曲线 C_2 没有公共点可得: $\frac{1}{2}t > 2+\sqrt{5}$, 或 $0 < t < 2+\sqrt{5}$

$$\therefore t > 4+2\sqrt{5}, \text{ 或 } 0 < t < 2+\sqrt{5}.$$

选修 4-5, 不等式

24. 已知实数 a, b, c 满足 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

(I) 求 $a+b+c$ 的取值范围;

(II) 若不等式 $|x-1| + |x+1| \geq (a+b+c)^2$ 对一切实数 a, b, c 恒成立, 求实数 x 的取值范围.

解: (I) $\because (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

$$\text{又 } \because 2ab \leq a^2 + b^2; 2bc \leq b^2 + c^2; 2ac \leq a^2 + c^2$$

$$\therefore (a+b+c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2) = 3$$

$$\text{即 } -\sqrt{3} \leq a+b+c \leq \sqrt{3}.$$

$a+b+c$ 的取值范围是 $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

(II) 若不等式 $|x-1| + |x+1| \geq (a+b+c)^2$ 对一切实数 a, b, c 恒成立,

则 $|x-1| + |x+1| \geq 3$, 解集为: $(-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{3}{2}, +\infty)$