

2014—2015 学年度上学期期中阶段测试 高一数学试卷答案

一、选择题

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	D	B	A	C	C	A	D	A	C	B	B

二、填空题

13、 $\{0,1,3\}$ 14、 $[0,2]$ 15、 $\frac{1}{4} \leq a < \frac{1}{2}$ 16、 $\frac{1}{3}$ 或 3

三、解答题

17、解：(1) 原式 $= \frac{24}{5} \times 5 \times x^{-\frac{2}{3}+1-\frac{1}{3}} \times y^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}} = 24x^0y^{\frac{1}{6}} = 24y^{\frac{1}{6}}$ 5 分

(2) 原式 $= \left(\log_2 5 - \frac{1}{2} \log_2 5 \right) \left(\log_5 2 - \frac{1}{2} \log_5 2 \right) = \frac{1}{4} \log_2 5 \cdot \log_5 2$
 $= \frac{1}{4} \log_2 5 \cdot \frac{1}{\log_2 5} = \frac{1}{4}$ 10 分

18、解：(1) $A = (-1, +\infty)$, $B = (-\infty, 2]$, 所以 $A \cap B = (-1, 2]$ 6 分

(2) $A \cap B \cap Z = \{0, 1, 2\}$, 所以满足条件的集合 M 为:

$\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}$ 共 8 个12 分

19、解：(1) $a=1$ 时, $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

任取 $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$, 则 $\Delta x = x_2 - x_1 > 0$,

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x_2) - f(x_1) = \sqrt{x_2} + \frac{1}{\sqrt{x_2}} - \sqrt{x_1} - \frac{1}{\sqrt{x_1}} = (\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}) + \frac{\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}}{\sqrt{x_2 x_1}} \\ &= (\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x_2 x_1}} \right) = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x_1 x_2}} \right) \end{aligned}$$

$$\because 1 \leq x_1 < x_2 \quad \therefore x_2 - x_1 > 0, \sqrt{x_1 x_2} > 1, \frac{1}{\sqrt{x_1 x_2}} < 1 \quad \therefore 1 - \frac{1}{\sqrt{x_1 x_2}} > 0$$

又 $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} > 0$, 于是 $\Delta y > 0$, 即 此时 $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增.

.....6 分

(2) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

①当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, a]$ 上递减, 在 $[a, +\infty)$ 上递增;

(i) 当 $0 < a \leq 1$ 时, $f(x)_{\min} = f(1) = 1 + a$;

(ii) 当 $1 < a < 4$ 时, $f(x)_{\min} = f(a) = 2\sqrt{a}$;

(iii) 当 $a \geq 4$ 时, $f(x)_{\min} = f(4) = 2 + \frac{a}{2}$.

②当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上递增, 此时 $f(x)_{\min} = f(1) = 1 + a$.

.....12 分

20、解: (1) $f(x) + f(-x) = \frac{2e^x + 1}{e^x + 1} + \frac{2e^{-x} + 1}{e^{-x} + 1} = \frac{2e^x + 1}{e^x + 1} + \frac{2 + e^x}{1 + e^x} = \frac{3(1 + e^x)}{1 + e^x} = 3$

$$g(x) + g(-x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) + \ln(-x + \sqrt{1 + x^2}) = \ln(x^2 + 1 - x^2) = 0$$

.....6 分

(2) 由题意可知 $F(x)$ 定义域为 R , 由 $f(x) = \frac{2e^x + 1}{e^x + 1} = \frac{2(e^x + 1) - 1}{e^x + 1} = 2 + \frac{-1}{e^x + 1}$ 可知 $f(x)$

在定义域为 R 上单调递增, $g(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 由 (1) 知

$g(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ 是奇函数, 故 $g(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ 在定义域为 R 上单调递增,

所以 $F(x) = f(x) + g(x)$ 在定义域为 R 上单调递增.

$F(x) = f(x) + g(x)$ 的最小值, 最大值分别为 $F(-2), F(2)$.

结合(1)可得: $F(-2) + F(2) = f(-2) + g(-2) + f(2) + g(2) = 3$ 12 分

21、解：(1) 由 $f(x) = f(2-x)$ 可知 $f(x)$ 的对称轴 $x=1$ ，故 $a=1$ ，由 $f(x) - \frac{3b}{4} = 0$

$x^2 - 2x + \frac{b}{4} = 0$ 由两个相等实数根，故 $\Delta = 4 - b = 0$ ， $b=4 \therefore f(x) = x^2 - 2x + 4$ 。

.....4 分

(2) 由 $f(x) = x^2 - 2ax + b$ 对称轴为 $x=a > 1$ ， $f(x) = x^2 - 2ax + b$ 在区间 $[1, a]$ 单调递减， $f(x)_{\max} = f(1) = 1 - 2a + b$ ， $f(x)_{\min} = f(a) = b - a^2$

$$\begin{cases} 1 - 2a + b = a \\ b - a^2 = 1 \end{cases} \quad \text{由于 } a > 1 \text{ 解得 } a = 2 \quad \text{.....8 分}$$

(3) $f(x) = x^2 - 2ax + b$ 的对称轴为 $x=a$ ，由 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 2]$ 上是减函数， $\therefore a \geq 2$ 。由任意 $x_1, x_2 \in [1, a+1]$ ， $|f(x_1) - f(x_2)| \leq 4$ ，可得 $f(x)_{\max} - f(x)_{\min} \leq 4$

$$f(x)_{\min} = f(a) = b - a^2, \quad f(x)_{\max} = f(1) = 1 - 2a + b$$

$$f(x)_{\max} - f(x)_{\min} = 1 - 2a + a^2 \therefore a^2 - 2a + 1 \leq 4 \text{ 解得 } -1 \leq a \leq 3$$

故 a 的取值范围为 $2 \leq a \leq 3$ 12 分

22、解：(1) 当 $f(x) = ax^2 + 2x - 4a (a \in R)$ 时，方程 $f(x) + f(-x) = 0$ 即

$2a(x^2 - 4) = 0$ 有解 $x = \pm 2$ ，所以 $f(x)$ 为“局部奇函数”。4 分

$$(2) \text{ 若 } g(x) = \begin{cases} \log_2(x^2 - 2ax + 2a^2), & x \geq 2 \\ -3, & x \leq -2 \end{cases} \text{ 为“局部奇函数”，}$$

则等价于“方程 $g(x) = -g(-x)$ 在 $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ 上有解”

等价于方程 $\log_2(x^2 - 2ax + 2a^2) = 3$ 在 $[2, +\infty)$ 上有解

即方程 $x^2 - 2ax + 2a^2 - 8 = 0$ 在 $[2, +\infty)$ 上有解

$$\text{令 } \varphi(x) = x^2 - 2ax + 2a^2 - 8,$$

①当 $\varphi(2) \leq 0$ ， $\varphi(x) = 0$ 在 $[2, +\infty)$ 上有解。

由 $\varphi(2) \leq 0$, $2a^2 - 4a - 4 \leq 0$, 解得 $1 - \sqrt{3} \leq a \leq 1 + \sqrt{3}$;

②当 $\varphi(2) > 0$, $\varphi(x) = 0$ 在 $[2, +\infty)$ 上有解等价于

$$\begin{cases} \Delta = 4a^2 - 4(2a^2 - 8) \geq 0 \\ a > 2 \\ \varphi(2) > 0 \end{cases}, \text{ 解得 } 1 + \sqrt{3} < a \leq 2\sqrt{2}$$

综上, 所求实数 a 的取值范围为 $1 - \sqrt{3} \leq a \leq 2\sqrt{2}$12 分